THERMISCHE EFFEKTE IN QUANTISIERTEN FELDERN AM BEISPIEL DES GROSS-NEVEU-MODELLS

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Berthold-Georg Englert

aus Urach

1981

THERMISCHE EFFEKTE IN QUANTISIERTEN FELDERN AM BEISPIEL DES GROSS-NEVEU-MODELLS

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Berthold-Georg Englert

aus Urach

1981

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung:	24. Juli 1981
Dekan:	Prof. Dr. Rudolf Hübener
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. Walter Dittrich
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. André Neveu, Paris
3. Berichterstatter:	Prof. Dr. Harald Stumpf

Abstract

ENGLERT, BERTHOLD-GEORG:

THERMISCHE EFFEKTE IN QUANTISIERTEN FELDERN
AM BEISPIEL DES GROSS-NEVEU-MODELLS

Das Gross-Neveu-Modell wird verwendet, um thermische Effekte in quantisierten Feldern beispielartig zu diskutieren. Dazu wird das effektive Potential zu beliebiger Temperatur in ein-Loop-Näherung, d.h. in niedrigster Ordnung der 1/N-Entwicklung, berechnet. Es erweist sich als günstig, das Modell dimensionell zu regularisieren und durch Subtraktion im Impulsraum zu renormieren. Aus dem effektiven Potential gewinnt man die Temperaturabhängigkeit der durch dynamische Symmetriebrechung erzeugten Fermionmasse. Dieses Ergebnis kann durch eine manifest selbstkonsistente Rechnung reproduziert werden, wobei man in natürlicher Weise auf die Tadpole-Gleichung geführt wird. Die Berechnung von temperaturabhängigen elastischen Streuquerschnitten rundet die ein-Loop-Rechnungen ab und gibt Hinweise, in welcher Richtung die experimentelle Suche nach thermischen Effekten möglicherweise erfolgreich sein könnte.

Ferner ist die Tadpole-Gleichung in zwei-Loop-Näherung ausgewertet. Dabei stellt sich heraus, daß nur eine selbstkonsistente Renormierung verwertbare Ergebnisse liefert, während bei einer pertubativen Renormierung die dimensionelle Transmutation nicht vollzogen werden kann. Allerdings erhält man keine wirklichen Verbesserungen der ein-Loop-Resultate, was daran liegt, daß man nicht alle Beiträge der nächsten 1/N-Ordnung berücksichtigt hat.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1) Einleitung	1
2) Motivation. Überblick über Ergebnisse anderer Autoren und Einordnung dieser Dissertation	2
3) Thermische Effekte im Gross-Neveu-Modell als Beispiel	7
a) Das Gross-Neveu-Modell	7
b) Näherungen und ihre Brauchbarkeit	25
c) Thermische Korrekturen 1. Ordnung im Gross-Neveu-Modell	35
1) Das effektive Potential	35
2) Berechnung des effektiven Potentials bei Temperatur null. Massenformeln	47
3) Die Tadpole-Gleichung	57
4) Effektives Potential und Tadpole-Gleichung bei endlicher Temperatur	63
5) Elastische Streuung	73
d) Korrekturen höherer Ordnung	80
4) Anhänge A - N	94
5) Literaturverzeichnis	129
6) Lebenslauf und Schriftenverzeichnis	134

1) Einleitung

Diese Dissertation befaßt sich mit thermischen Effekten in relativistischen Quantenfeldtheorien. Dabei dient das Gross-Neveu-Modell als Beispiel. Inbesondere wird gezeigt, daß sich die sogenannte Tadpole-Gleichung für eine Berechnung der Temperaturabhängigkeit der dynamischen Masse eignet. Ferner werden Berechnungen zur elastischen Streuung angestellt, und der Einfluß der Temperatur auf Wirkungsquerschnitte untersucht. Die Arbeit ist in dieser Weise gegliedert:
Der folgende Abschnitt 2 enthält Ausführungen zur Motivation und gibt einen Überblick über das Schaffen anderer Autoren. Im Abschnitt 3a stellen wir das Gross-Neveu-Modell vor und besprechen dann im Abschnitt 3b mögliche Näherungen und ihre Brauchbarkeit. Damit ist es dann möglich, im Abschnitt 3c thermische Korrekturen erster Ordnung zu berechnen, wobei wir besonders an der dynamischen Masse, dem effektiven Potential und elastischen Streuquerschnitten interessiert sind. Schließlich diskutieren wir noch im Abschnitt 3d Korrekturen höherer Ordnung. Einige ergänzende Bemerkungen sowie umfangreichere Nebenrechnungen sind in Anhängen untergebracht.

Es wurde darauf Wert gelegt, die Arbeit so abzufassen, daß sie mit möglichst geringen Vorkenntnissen gelesen werden kann.

2) Motivation. Überblick über Arbeiten anderer Autoren und Einordnung dieser Dissertation

"Big Bang" und "MIT-Bag" sind die Schlagworte, welche die Situationen beschreiben, in denen es wichtig ist, zu wissen, wie sich relativistische Quantenfeldtheorien bei hohen Temperaturen verhalten. Big Bang meint bekanntlich den großen Knall zu Beginn unseres Universums. Nach gängiger Meinung war damals die ganze Energie des Weltalls in einem kleinen Volumen zusammengepreßt, das sich dann rasch ausdehnte. Diese Expansion des Weltalls wird ja bis heute beobachtet. Hand in Hand damit hat sich das Weltall abgekühlt von anfangs unvorstellbaren Temperaturen auf jene $3^{\circ}K$, die man heute als Hintergrundstrahlung des Himmels mißt. Bei den hohen Temperaturen gleich nach dem Big Bang war die gesamte Materie sozusagen "verdampft", womit gemeint ist, daß die ganze Energie strahlungsförmig war; d.h. das Weltall bestand aus einem heißen Gas von Photonen und anderen masselosen Teilchen. Die massiven Teilchen, so wie wir sie heute kennen, sind erst nach und nach "ausgefroren" worden, sobald das All sich genügend abgekühlt hatte. Die Temperatur T, bei welcher das geschah, und die Masse m der betreffenden Teilchen stehen dabei in der ungefähren Beziehung

$$mc^2 \approx k_B T.$$

Für Elektronen ergibt das $T \approx \frac{1}{2}\, 10^{10}\ ^{\circ}K$. Wie die jüngsten Entwicklungen der Elementarteilchenphysik zeigen, ist ein möglicher und wahrscheinlicher Mechanismus für dieses "Ausfrieren" die sogenannte Symmetriebrechung, die im nächsten Kapitel erläutert wird. Ein genaues Verständnis des frühen Universums erfordert demnach die Analyse von quantisierten Feldern bei hohen Temperaturen. Dabei müssen unter anderem die folgenden Tatsachen erklärt werden:

(a) das Übergewicht der Materie über die Antimaterie im Weltall,

(b) die Isotropie und Homogenität des Weltalls.

Mögliche Erklärungen von (a) wurden von verschiedenen Autoren diskutiert [1-4], insbesondere hat sich Wilczek in diesem Zusammenhang gleich noch eine spekulative Hypothese zur Erklärung von (b) ausgedacht [3]. Ansonsten sei hier auf die Review-Artikel von Linde [5] sowie Dolgow und Zeldovich [6], die zahlreiche Literaturhinweise enthalten, und auf die neueren Arbeiten von Fleming et al. [7,8], Kazanas [9] sowie Billoire und Tamvakis [10] verwiesen.

Das MIT-Bag-Modell [11], das K. Johnson und seine Mitarbeiter am MIT um 1974/75 erfunden haben [12-14], ist ein phänomenologisches Hadronenmodell: Die Hauptidee ist, die die Hadronen bildenden Quarks und Gluonen in einen begrenzten Raumbereich einzusperren ("Bag" ist das englische Wort für "Sack"), um auf diese Weise radikal für das Confinement zu sorgen. Damit der Bag durch den Druck der eingesperrten Quarks nicht platzt, muß auf ihn von außen ein Gegendruck ausgeübt werden. Die Dynamik des Bags wird daher durch eine Bag-Konstante B bestimmt, die zur Beschreibung des Gegendruckes erforderlich ist und die Dimension eines Druckes, d.h. (Energie)^4 hat. Ihr Wert wurde mit $B \approx (145\ \mathrm{MeV})^4$ abgeschätzt [13]. Für das Innere des Bags bedeutet das eine Temperatur von rund $k_B B^{-1/4} \approx 10^{12} - 10^{13}\ ^\circ K$. Wieder haben wir es also mit quantisierten Feldern sehr hoher Temperatur zu tun.

Es soll hier nicht verschwiegen werden, daß man bis heute noch nicht weiß, wie man das Bag-Modell aus der Quantenchromodynamik (QCD) ableiten kann. Hinweise, wie das geschehen könnte, finden sich in jüngeren Arbeiten von Jevicki [15] und Adler [16,17] in welchen Mechanismen zur Bag-Entstehung beschrieben werden. Dabei hat man die Vorstellung, daß sich das Bag-Modell zur QCD so verhält wie die Landau-Ginzburg-Theorie der Supraleitung zur BCS-Theorie.

Thermische Effekte in quantisierten Feldern sind also von großem Interesse, und eine Vielzahl wissenschaftlicher Arbeiten liegt zu diesem Thema vor. Der Rest dieses Kapitels soll dazu

dienen, einen Überblick über das Schaffen der letzten Jahre zu geben, wobei allerdings der Anspruch auf Vollständigkeit nicht erhoben wird.

Da einer Energie von 1 eV eine Temperatur von rund 10 000°K entspricht, kann niemand erwarten, daß es im Rahmen der Atom- oder Festkörperphysik möglich ist, thermische Korrekturen zur Quantenelektrodynamik (QED) bei Temperatur null zu bemerken. Ein Beispiel ist der Lamb-Shift, der ja seine Ursache in der Selbstwechselwirkung des Elektrons hat. Vergleicht man diesen Effekt bei 300°K mit dem bei 0°K, so findet man [18]

$$\frac{\Delta E(300^\circ K)}{\Delta E(0^\circ K)} \approx 1 + 2 \cdot 10^{-6} \exp(-10^5),$$

was natürlich eine außerordentlich winzige Abweichung ist. Man braucht sich keinerlei Hoffnungen zu machen, daß das jemals gemessen wird. Tatsächlich stimmen ja die Ergebnisse der QED ganz allgemein mit den Beobachtungen sehr gut überein, obwohl die Rechnungen genau genommen nur für 0°K gelten und die Messungen sicher bei endlichen Temperaturen gemacht sind. Abschätzungen zeigen, daß man mindestens Temperaturen von 10^7 °K benötigt, um beim Lamb-Shift Abweichungen von 1% zu erhalten [18]. Leider ist das eine rein akademische Feststellung, da bei solchen Temperaturen Atomphysik nicht mehr möglich ist. Auch wenn man Korrekturen zum Photonpropagator betrachtet, findet man keine experimentell nachweisbaren Effekte [19,20].

Eine labormäßige Überprüfung von thermischen Effekten in der QED scheint also aussichtslos. Ausreichend hohe Temperaturen findet man ohnedies nur bei astronomischen Objekten, z.B. an der Oberfläche von Neutronensternen. Dort bestimmen sehr starke Magnetfelder das Verhalten der Materie. Da nun in gewisser Analogie zum Hawking-Effekt [21] der Gravitationstheorie auch in der Elektrodynamik eine formale Äquivalenz von starken Feldern und Temperaturbädern besteht [22] (allerdings mit verkehrter Statistik), liegt es nahe, die QED in starken äußeren Feldern

bei endlicher Temperatur zu untersuchen. Tatsächlich wurden für den Fall eines konstanten Hintergrundmagnetfeldes die effektiven Lagrangedichten für skalare und spionerielle QED in Abhängigkeit von der Temperatur von Dittrich [23] berechnet.

Neuerdings wird dieselbe Fragestellung auch in der QCD diskutiert, wobei jedoch keine einhellige Meinung herrscht. So widersprechen die Ergebnisse von Dittrich und Schanbacher [24,25] denen von Müller und Rafelski [26], was die Temperaturabhängigkeit der Bag-Konstanten anbelangt, und auch eine Arbeit von Ninomiya und Sakai [27] brachte keine Klärung. Allerdings scheint die Schanbachersche Dissertation [25] die meisten offenen Fragen in endgültiger Weise zu beantworten. Man wird die weitere Entwicklung abwarten müssen.

Effektive Lagrangedichten bei endlicher Temperatur wurden auch von anderen Autoren für eine ganze Reihe von verschiedenen Modellen berechnet [1,16,17,28-33]. Es gibt aber auch andere Methoden, um thermische Effekte zu untersuchen. So ist im Zusammenhang mit der Bag-Entstehung eine Art statistische Mechanik eines Instantongases im Gespräch [15,34-37]. Auch eine Thermodynamik für eingesperrte Quarks ist schon konstruiert worden [38]. Ferner hat Love an Hand des Schwinger-Modells gezeigt, daß auch das Studium des exakten Fermion-Propagators bei endlicher Temperatur ein geeignetes Mittel ist, um thermische Effekte zu untersuchen [39].

Das Hauptanliegen dieser Dissertation ist es, zu zeigen, daß auch die sogenannten Tadpole-Gleichungen durchaus zur Berechnung von Temperaturabhängigkeiten benutzt werden können. Für manche Zwecke erscheint dieser Zugang sogar besonders geeignet, etwa in der wichtigen Frage der Symmetriebrechung. Das wird im nächsten Kapitel am Beispiel des Gross-Neveu-Modells demonstriert.

Was ausdrücklich nicht Thema dieser Arbeit ist, das ist der schon angesprochene Hawking-Effekt [21] und verwandte Dinge. Der Hawking-Effekt ist sicher eine der überraschenden Entdeckungen

der letzten Jahre und besteht in der Tatsache, daß ein starkes Gravitationsfeld (etwa in der Nähe eines schwarzen Loches) Teilchen mit thermischer Verteilung produziert. Inzwischen hat man gefunden, daß auch in beschleunigten Bezugssystemen etwas derartiges beobachtet wird [40-45]. Räume mit gekrümmter Metrik werden jedoch in dieser Arbeit nicht betrachtet, so daß diese sehr interessanten Entwicklungen hier nicht berücksichtigt werden. Gerade für eine gültige Beschreibung des Big Bang wäre aber eine simultane Behandlung von Einflüssen der Temperatur und der Raumkrümmung wünschenswert, insbesondere da es Anzeichen dafür gibt, daß sich diese Einflüsse gegenseitig kompensieren können [8,46].

3) Thermische Effekte im Gross-Neveu-Modell als Beispiel

In diesem Kapitel sollen Temperatureffekte im Gross-Neveu-Modell betrachtet werden. Dieses Modell erlaubt trotz seiner einfachen 4-Fermion-Wechselwirkung das Studium sehr interessanter Phänomene, die man in realistischen Theorien, wie etwa in der QCD, zwar erwartet aber wegen der Komplexität der Theorien dort nur schwer studieren kann. Nur um die Nützlichkeit des Gross-Neveu-Modells zu unterstreichen, seien hier als Stichworte folgende Erscheinungen genannt: dynamische Massenerzeugung, asymptotische Freiheit, dimensionelle Transmutation. Eine genaue Diskussion dieser Begriffe geschieht im Laufe des Kapitels, das wie folgt aufgebaut ist: Der Abschnitt 3a stellt das Gross-Neveu-Modell vor und zitiert eine Reihe wichtiger Erkenntnisse über das Modell. In 3b werden verschiedene Näherungsmethoden dargestellt und ihre Brauchbarkeit diskutiert. Damit sind dann die Voraussetzungen geschaffen, um im folgenden Abschnitt 3c thermische Korrekturen 1. Ordnung auszurechnen. Der letzte Abschnitt 3d enthält schließlich Rechnungen zu Korrekturen höherer Ordnung.

3a) Das Gross-Neveu-Modell

Das Gross-Neveu-Modell ist eine Verallgemeinerung des Thirring-Modells [47] bzw. des Ansel'm-Modells [48] und trägt seinen Namen nach der Pionierarbeit von David J. Gross und André Neveu aus dem Jahre 1974 [49]. Den genannten Modellen ist gemeinsam, daß sie masselose Fermionen mit einer 4-Fermion Wechselwirkung beschreiben. Während es jedoch im Thirring-Modell nur eine Fermionensorte und im Ansel'm-Modell deren zwei gibt, enthält das Gross-Neveu-Modell N verschiedene Fermionen; oder wie man es heute moderner ausdrückt: das Fermion des Gross-Neveu-Modells kommt in N verschiedenen Farben vor. Demnach sind die fundamentalen Größen des Modells N Spinorfelder $\psi^{(j)}$ $(j=1,\dots,N)$. Die Lagrangedichte hat die Form

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi + \frac{1}{2}g^2(\bar{\psi}\psi)^2 , \qquad (3a\text{-}1)$$

wobei wir folgende abkürzende Schreibweisen eingeführt haben:

$$\bar{\psi}\psi = \sum_{j=1}^{N} \bar{\psi}^{(j)} \psi^{(j)} ,$$
$$i\bar{\psi}\not{\partial}\psi = \sum_{j=1}^{N} i\bar{\psi}^{(j)}\not{\partial}\psi^{(j)} . \qquad (3a\text{-}2)$$

Wie üblich benützen wir solche Einheiten, daß $\hbar = 1$, $c = 1$ und später noch $k_B = 1$. Im übrigen entspricht die Notation der des bekannten Lehrbuches von Bjorken und Drell [50]; insbesondere $a\cdot b = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - \vec{a}\cdot\vec{b}$.

Fragt man nach der Renormierbarkeit der Theorie, so ist das die Frage nach der Dimension des Kopplungsparameters g^2. In einer n-dimensionalen Raumzeit, hat die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ die Dimension (Länge)$^{-n}$, wofür vereinfachend $\dim \mathcal{L} = -n$ geschrieben werde. Aus $\dim \partial = -1$ folgt $\dim \bar{\psi}\psi = 1-n$ und daher $\dim g^2 = n-2$. Es ist daher zu erwarten, daß die Theorie für $n < 2$ endlich (superrenormierbar), für $n = 2$ renormierbar und für $n > 2$ nicht renormierbar ist. Das wird noch deutlicher werden, wenn Strahlungskorrekturen zur Diskussion stehen. Wie eine neuere Arbeit von Munczek und Nemirovsky zeigt [51] , kann man eine 4-Fermion-Wechselwirkung in gewisser Weise auch in 4 Dimensionen renormieren, sofern man eine Lagrangedichte wie (3a-1) als Grenzfall einer bestimmten nichtpolynomialen, nichtlokalen Lagrangedichte ansieht. So eine Strategie fällt aber nicht unter das, was man normalerweise unter Renormierung versteht.

Das Gross-Neveu-Modell ist also in 2 Dimensionen formuliert, genau wie das Thirring- und das Ansel'm-Modell, denen es in den Fällen N = 1 bzw. N = 2 äquivalent ist (siehe dazu auch [52]). In 2 Dimensionen haben Dirac-Spinoren 2 Komponenten, und Dirac-Matrizen sind 2 x 2 Matrizen. Die Standard-Darstelllung ist [53]

$$\gamma^0 = \sigma_z \ , \ \gamma^1 = i\sigma_y \ , \ \gamma^5 = \gamma_5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_x , \qquad (3a\text{-}3)$$

worin die σ's die Paulischen Spin-Matrizen sind. Offensichtlich sind die Gleichungen

$$\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu = 2g^{\mu\nu},$$
$$\gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu = 0,$$
$$\gamma_5^2 = 1 \qquad (3a\text{-}4)$$

mit

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

Es ist eine berechtigte Frage, ob es viel Sinn hat, Feldtheorien in 2 Dimensionen zu betrachten. Bekanntlich ist ja die homogene Lorentzgruppe in 2 Dimensionen abelsch, was natürlich die Physik etwas trivialisiert. Schlimmer noch: in 2 Dimensionen ist die kausale Gruppe nicht mit der Poincaré-Gruppe (vergrößert um Dilatationen) identisch; dazu braucht man mindestens 2 Raumdimensionen [54]. Doch ist das eigentlich nie die Ursache von Schwierigkeiten. Allerdings sind gewisse Phänomene bei nur einer Raumdimension nicht vorhanden; beispielsweise gibt es keine Goldstone-Bosonen [55,56]. Aber man kann ja auch gar nicht erwarten, daß 2-dimensionale und 4-dimensionale Physik keine wesentlichen Unterschiede aufweisen. Andererseits gibt es Effekte und Mechanismen, die man ohne Einbuße physikalischer Relevanz durchaus in einer auf eine Raumdimension beschränkten Physik erörtern kann. Dazu gehört auch die dynamische Brechung einer diskreten Symmetrie, wie sie im Gross-Neveu-Modell auftritt, wovon gleich ausführlich die Rede sein wird. Da 2-dimensionale Modelle häufig nichtpertubativ gelöst werden können, erfreuen sie sich einer großen Beliebtheit. Es sei nur an das Schwinger-Modell [57] -das ist QED in 2 Dimensionen-, an das t'Hooft-Modell [58] -das ist QCD in 2 Dimensionen-, an das σ-Modell [59] und an das CP^{N-1}-Modell [60,61] erinnert. Zum Studium bestimmter Effekte, und nur dafür, sind solche Modelle sehr nützlich, auch wenn sie mit realistischen Theorien wie der 4-dimensionalen QED oder QCD nur wenig gemeinsam haben. Aber auch die Untersuchung von Modelltheorien dient letztlich dem Verständnis der Realität, weil wir an Modellen

unsere Anschauung und Intuition schulen. Dies ist überaus wichtig, um mit hochkomplizierten Theorien umzugehen. Die Beschäftigung mit Modellen, die einige wenige Phänomene in sehr durchsichtiger Weise zeigen, ist also nicht verwerflich, sondern oft sehr hilfreich. Gerade das Gross-Neveu-Modell hat sich dabei als besonders nützlich erwiesen.

Die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ aus (3a-1) des Gross-Neveu-Modells hat eine hohe innere (dynamische) Symmetrie. Da in $\mathcal{L}$ die Felder nur in den Kombinationen (3a-2) vorkommen, kann man sie durch eine unitäre Transformation

$$\psi^{(j)} \longrightarrow U_{ji}\, \psi^{(i)}$$

mischen, ohne daß $\mathcal{L}$ geändert wird. $\mathcal{L}$ hat also eine U(N)-Symmetrie Tatsächlich hat $\mathcal{L}$ eine noch größere innere Symmetrie, nämlich eine O(2N)-Symmetrie, wobei U(N) nur eine Untergruppe ist [62]. Um das zu sehen, benützen wir eine Majorana-Zerlegung der Spinoren in zwei hermitesche Summanden gemäß

$$\psi^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_1^{(j)} + i\, \psi_2^{(j)} \right). \qquad (3a\text{-}5)$$

Aus den Antikommutatoren für $\psi^{(j)}$ und $\psi^{(j)+}$ leitet man leicht die Vertauschungsregeln für die Majoranafelder ab. Das ergibt ($\alpha, \beta = 1, 2$ =Spinorindices)

$$\left\{ \psi_{1\alpha}^{(j)}, \psi_{2\beta}^{(j)} \right\} = 0 \,, \quad \left\{ \psi_{1\alpha}^{(j)}, \psi_{1\beta}^{(j)} \right\} = \left\{ \psi_{2\alpha}^{(j)}, \psi_{2\beta}^{(j)} \right\} = \delta_{\alpha\beta} \,.$$

Die Invarianz des Ausdrucks $\bar{\psi}\psi$ unter orthogonalen Transformationen der 2N Majoranafelder verlangt, daß man $\bar{\psi}\psi$ in der Form

$$\bar{\psi}\psi = \frac{1}{2} \left(\psi_1 \gamma^0 \psi_1 + \psi_2 \gamma^0 \psi_2 \right)$$

schreiben kann. (In der letzten Gleichung sind wie üblich die Farbindices (j) und die Summe darüber unterdrückt worden.) Durch Einsetzen der Majorana-Zerlegung und unter Verwendung der Vertauschungsrelationen findet man aber

$$\bar{\psi}\psi = \frac{1}{2}\left(\psi_1 \gamma^0 \psi_1 + \psi_2 \gamma^0 \psi_2 + i\,\psi_{1\alpha}\psi_{2\beta}\left(\gamma^0_{\alpha\beta} + \gamma^0_{\beta\alpha}\right)\right),$$

d.h. γ^0 muß antisymmetrisch gewählt werden. Analog folgt aus der Forderung, daß $i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi$ die O(2N)-invariante Gestalt

$$i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi = \frac{1}{2} i\left(\psi_1 \partial_0 \psi_1 + \psi_2 \partial_0 \psi_2 + \psi_1 \gamma_5 \partial_1 \psi_1 + \psi_2 \gamma_5 \partial_1 \psi_2\right)$$

annimmt, die Bedingung

$$\gamma^5_{\alpha\beta} - \gamma^5_{\beta\alpha} = 0,$$

d.h. γ^5 muß symmetrisch sein. Solche γ-Matrizen sind in der Tat durch die Majorana-Darstellung

$$\gamma^0 = \sigma_y \;,\quad \gamma^1 = i\,\sigma_x \;,\quad \gamma^5 = \gamma_5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_z$$

an Stelle der Standard-Darstellung (3a-3) gegeben. In den Majorana-Feldern (3a-5) nimmt $\mathcal{L}$ die manifest O(2N)-invariante Form

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left(\psi_1 \partial_0 \psi_1 + \psi_2 \partial_0 \psi_2 + \psi_1 \gamma_5 \partial_1 \psi_1 + \psi_2 \gamma_5 \partial_1 \psi_2\right) + \\ + \frac{g^2}{4}\left(\psi_1 \gamma^0 \psi_1 + \psi_2 \gamma^0 \psi_2\right)^2$$

an. $\mathcal{L}$ hat also eine dynamische O(2N)-Symmetrie.

Für das Anliegen dieser Arbeit sind die Majorana-Felder von keinem Nutzen, und wir werden daher im Folgenden stets die ursprünglichen $\psi^{(j)}$ benutzen. Die hermiteschen Felder $\psi_1^{(j)}$ und $\psi_2^{(j)}$ haben sich bei Untersuchungen des Teilchenspektrums [62] und der S-Matrix [63,64] als besonders nützlich erwiesen. Dashen, Hasslacher und Neveu [62] fanden ein reiches Teilchenspektrum, das neben solitonartigen Teilchen vor allem Fermion-Antifermion- und Multi-Fermion-Bindungszustände enthält, die den Mesonen und Baryonen der QCD analog sind. Die dabei entwickelte semiklassische DHN-Methode, eine Art WKB-Näherung,

kommt jetzt auch beim Baryonen-Spektrum zur Anwendung [65]. Als interessantes Ergebnis von S-Matrix-Analysen sei erwähnt, daß es im Gross-Neveu-Modell keine Paarproduktion gibt, d.h. Streuprozesse haben im Eingangs- und Ausgangskanal gleich viele Teilchen [63].

Über die O(2N)-Symmetrie hinaus besitzt $\mathcal{L}$ noch eine chirale Symmetrie, da es auch unter der diskreten chiralen Transformation

$$
\begin{aligned}
&\psi^{(j)} \longrightarrow \gamma_5 \psi^{(j)}, \\
&\bar{\psi}^{(j)} \longrightarrow \overline{\gamma_5 \psi^{(j)}} = \psi^{(j)+} \gamma_5 \gamma^0 = -\bar{\psi}^{(j)} \gamma_5, \\
&\bar{\psi}\psi \longrightarrow \sum_{j=1}^{N} (-\bar{\psi}^{(j)}\gamma_5)(\gamma_5 \psi^{(j)}) = -\bar{\psi}\psi, \\
&i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi \longrightarrow \sum_{j=1}^{N} i(-\bar{\psi}^{(j)}\gamma_5)\gamma^\mu \partial_\mu (\gamma^5 \psi) = \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{N} i\,\bar{\psi}^{(j)} \gamma^\mu \partial_\mu \gamma_5 \gamma_5 \psi = i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi
\end{aligned}
\tag{3a-6}
$$

invariant ist. Diese chirale Symmetrie schließt einen Massenterm $m\bar{\psi}\psi$ in $\mathcal{L}$ aus.

Wie im Abschnitt 3c gezeigt werden wird, brechen Strahlungskorrekturen die chirale Symmetrie und erzeugen so einen Massenterm. Die Masse m der Gross-Neveu-Fermionen ist also kein weiterer Parameter der Theorie, sondern wird durch die Wechselwirkung erzeugt. A priori hat die Theorie zwar nur den dimensionslosen Parameter g^2, aber die Renormierung bringt einen Skalen-Parameter μ mit der Dimension einer Masse ins Spiel. Es wird also eine Gleichheit der Form

$$m = \mu f(g^2) \tag{3a-7}$$

gelten. Da es für $g^2 = 0$ keine Strahlungskorrekturen gibt, muß f(o) gleich null sein. Andererseits ist (3a-7) sicher kein

strömungstheoretisches Ergebnis, da die Strömungstheorie nur kleine Abweichungen von der freien Theorie beschreiben kann und daher in jeder Ordnung chiralsymmetrisch ist. Für die Funktion $f(g^2)$ bedeutet das, daß sie keine Taylorreihe um $g^2=0$ besitzt. Zusammen mit $f(0) = 0$ folgt daraus, daß f für kleine g^2 ungefähr wie $\exp(-1/g^2)$ aussehen muß. Gl. (3a-7) hat aber noch eine weitere Konsequenz: Die Fermion-Masse m auf der linken Seite hat physikalische Relevanz: m ist eine Observable. Die Renormierungsmasse μ auf der rechten Seite ist jedoch ein freier Parameter, der den jeweiligen Erfordernissen beliebig angepaßt werden kann. Deswegen kann auch g^2 keine Observable sein. Physikalische Größen, wie z.B. Wirkungsquerschnitte müssen also durch die physikalische Größe m parametrisiert werden, da g^2 kein vernünftiger Parameter ist. Wir beginnen also mit einem dimensionslosen Parameter (g^2), den wir nach der Berücksichtigung von Strahlungskorrekturen und der Renormierung durch einen dimensionsbehafteten Parameter (m) ersetzen müssen. Diese Prozedur wird als "dimensionelle Transmutation" bezeichnet und ist typisch für durch Strahlungskorrekturen gebrochene Symmetrien [66].

Die chirale Symmetrie (3a-6) ist wirklich diskret. $\mathcal{L}$ ist nicht invariant unter der allgemeineren kontinuierlichen chiralen Transformation

$$\psi^{(j)} \longrightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\psi^{(j)} = \psi^{(j)}\cos\alpha + i\gamma_5\sin\alpha\,, \qquad (3a\text{-}8)$$

die offenbar für $\alpha = \pi/2$ die diskrete chirale Transformation (3a-6) reproduziert. Denn unter (3a-8) haben wir statt (3a-6):

$$\bar\psi^{(j)} \longrightarrow \psi^{(j)\dagger} e^{-i\alpha\gamma_5}\gamma^0 = \bar\psi^{(j)}\cos\alpha + i\bar\psi^{(j)}\gamma_5\sin\alpha\,,$$

$$\bar\psi\psi \longrightarrow \sum_{j=1}^{N}(\bar\psi^{(j)}\cos\alpha + i\bar\psi^{(j)}\gamma_5\sin\alpha)(\psi^{(j)}\cos\alpha + i\gamma_5\psi^{(j)}\sin\alpha) =$$

$$= \bar\psi\psi\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + i2\,\bar\psi\gamma_5\bar\psi\cos\alpha\sin\alpha = \qquad (3a\text{-}9)$$

$$= \bar\psi\psi\cos(2\alpha) + i\,\bar\psi\gamma_5\psi\sin(2\alpha)\,,$$

$$i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi \longrightarrow \sum_{j=1}^{N} i\,(\bar{\psi}^{(j)}\cos\alpha + i\bar{\psi}^{(j)}\gamma_5\sin\alpha)\,\partial\!\!\!/\,(\psi^{(j)}\cos\alpha + i\gamma_5\psi^{(j)}\sin\alpha) =$$
$$= i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi ,$$

so daß der Wechselwirkungsterm $(\bar{\psi}\psi)^2$ unter (3a-8) nicht invariant ist. Man kann das Modell allerdings leicht verallgemeinern, indem man statt $(\bar{\psi}\psi)^2$ die Wechselwirkung $(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2$ betrachtet. Unter (3a-8) hat man nämlich zusätzlich zu (3a-9) noch

$$\bar{\psi}\gamma_5\psi \longrightarrow \sum_{j=1}^{N} (\bar{\psi}^{(j)}\cos\alpha + i\bar{\psi}^{(j)}\gamma_5\sin\alpha)\,\gamma_5\,(\psi^{(j)}\cos\alpha + i\gamma_5\psi^{(j)}\sin\alpha) =$$
$$= \bar{\psi}\gamma_5\psi\cos(2\alpha) + i\,\bar{\psi}\psi\sin(2\alpha)$$

und damit

$$(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 \longrightarrow (\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 . \qquad \text{(3a-10)}$$

Das durch die Lagrangedichte [49]

$$i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi + \tfrac{1}{2}g^2\left[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2\right] \qquad \text{(3a-11)}$$

definierte sogenannte chirale Gross-Neveu-Modell (oder U(N)-Thirring-Modell) hat also zusätzlich zur O(2N)-Symmetrie noch eine kontinuierliche chirale Symmetrie. Im Hinblick auf die Massenerzeugung durch Symmetriebrechung taugt das Modell (3a-11) aber nicht viel [67], da kontinuierliche Symmetrien in 2 Dimensionen nicht gebrochen werden können, weil es ja keine Golstone-Bosonen in 2 Dimensionen gibt [55]. Es gibt dagegen (in 2 Dimensionen) die Möglichkeit, eine kontinuierliche Symmetrie spontan zu brechen und wegen des Verbots von Goldstone-Bosonen dynamisch wiederherzustellen. Auch auf diese Weise kann eine Masse generiert werden. Für eine Untersuchung dieses Mechanismus' benutzt man aber besser nicht das chirale Gross-Neveu-Modell, sondern stattdessen das sogenannte CP^{N-1}-Modell [30,53,60,61,68-70]. Im folgenden beschränken wir uns auf das (eigentliche) Gross-Neveu-Modell mit $\mathcal{L}$ aus (3a-1). Wie neuere Arbeiten zeigen, gibt es

jedoch auch im chiralen Gross-Neveu-Modell noch bisher vernachlässigte interessante Aspekte [71-74].

Bisher haben wir noch nichts über das Vorzeichen der Wechselwirkung in $\mathcal{L}$ von (3a-1) gesagt. Daß es tatsächlich das richtige war, zeigt die folgende Überlegung [75]. Man betrachte den 4-Fermion-Vertex in Fig. 1a als übliche Yukawa-Kopplung mit einem intermediären Boson sehr großer Masse wie in Fig. 1b.

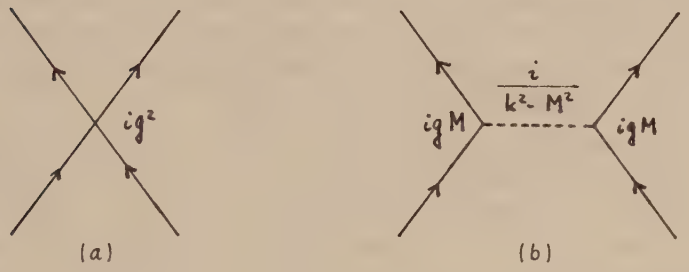


Fig. 1: Zum Vorzeichen der Wechselwirkung.

Eine Lagrangedichte zur Beschreibung dieser Yukawa-Kopplung ist

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi} i\partial\!\!\!/ \psi + \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \tfrac{1}{2}M^2\phi^2 + gM\bar{\psi}\psi\phi, \qquad (3a\text{-}12)$$

worin ϕ das Feld des ausgetauschten Bosons ist. $\mathcal{L}'$ beschreibt unabhängig vom Vorzeichen des Wechselwirkungstermes eine anziehende Fermion-Fermion-Kraft. (Ein anderes Vorzeichen könnte durch eine Vorzeichenänderung von M kompensiert werden, da das Vorzeichen der Masse irrelevant ist.) In (3a-12) lesen wir igM als Vertexfaktor und $\frac{i}{k^2 - M^2}$ für den ϕ-Propagator ab, so daß der Graph in Fig. 1b einen Faktor

$$(igM)\left(\frac{i}{k^2 - M^2}\right)(igM)$$

erhält. Für $M \to \infty$ ist das $+ig^2$. Also muß in Fig. 1a der

Vertex den Faktor $+ig^2$ erhalten. Das bedeutet, daß der Wechselwirkungsterm $\frac{1}{2}g^2(\bar{\psi}\psi)^2$ ist, wie das in (3a-1) schon richtig aufgeschrieben wurde. Um den Grenzwert $M\to\infty$ auch in (3a-12) durchzuführen, müssen wir mittels $\sigma = M\phi$ ein reskaliertes Bosonfeld einführen. Dann sehen wir, daß für $M\to\infty$:

$$\mathcal{L}' = i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi + \frac{1}{2M^2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2 + g\bar{\psi}\psi\sigma \longrightarrow \qquad (3a\text{-}13)$$

$$\longrightarrow \mathcal{L}_\sigma = i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi - \frac{1}{2}\sigma^2 + g\bar{\psi}\psi\sigma .$$

Da $\mathcal{L}_\sigma$ keine Ableitungen von σ enthält, ist σ keine dynamische Variable, und die Euler-Lagrange-Gleichung für σ ist keine Bewegungsgleichung sondern eine Nebenbedingung. Tatsächlich impliziert $\mathcal{L}_\sigma$ folgende Bewegungsgleichugen:

$$\begin{aligned} i\partial\!\!\!/\,\psi^{(j)} &= -g\,\psi^{(j)}\sigma, \\ \sigma &= +g\bar{\psi}\psi , \end{aligned} \qquad (3a\text{-}14)$$

von denen die zweite die angesprochene Nebenbedingung ist und nach Einsetzen in die erste

$$i\partial\!\!\!/\,\psi^{(j)} = -g^2\,\psi^{(j)}\bar{\psi}\psi \qquad (3a\text{-}15)$$

liefert. Gl. (3a-15) ist aber gerade die Bewegungsgleichung, die man aus dem ursprünglichen $\mathcal{L}$ in (3a-1) erhält. Das zeigt, daß die beiden Lagrangedichten $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}_\sigma$ dieselbe Physik beschreiben. Für das Folgende bedeutet es eine enorme Erleichterung, daß wir $\mathcal{L}_\sigma$ statt $\mathcal{L}$ benützen können.

Die Nützlichkeit von $\mathcal{L}_\sigma$ wird deutlich, wenn man Strahlungskorrekturen betrachtet. Nehmen wir als Beispiel Korrekturen zum Fermion-Propagator. Fig. 2 zeigt die einfachste Strahlungskorrektur zum Fermion-Propagator, die man erhält, wenn man $\mathcal{L}$ verwendet. Fig. 2b und Fig. 2c hingegen zeigen die entsprechenden Diagramme für $\mathcal{L}_\sigma$. Alle diese Diagramme sind zur Ordnung g^2 aber das Diagramm in Fig. 2b hat gegenüber dem in Fig. 2c einen zusätzlichen Faktor N, der daher stammt, daß N verschiedene

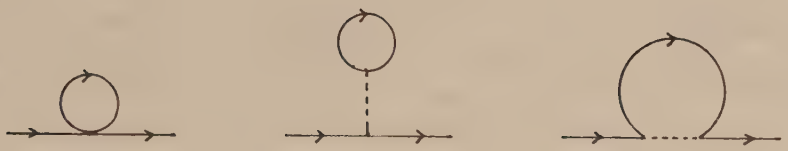


Fig. 2: Einfachste Strahlungskorrekturen zum Fermion-Propagator:

(a) Diagramm gemäß $\mathcal{L}$ *,*

(b), (c) zugehörige Diagramme gemäß $\mathcal{L}_\sigma$ *.*

Fermionen die geschlossene Schleife bilden können. Während wir also von Fig. 2a nur wissen, daß das Diagramm proportional zu g^2 ist, wissen wir von den Diagrammen (b) und (c), daß das eine für große N gegen das andere vernachlässigt werden kann. Für große N ist es also vorteilhaft, $\mathcal{L}_\sigma$ zu verwenden. Ferner sehen wir, daß für große N die führende Korrektur wie $g^2 N$ geht, was für $N \to \infty$ nur dann ein nichttriviales endliches Ergebnis liefert, wenn $g^2 N \to \lambda^2$ für große N. Es ist daher erforderlich, g in den Lagrangedichten durch eine N-abhängige Kopplungskonstante $\frac{\lambda}{\sqrt{N}}$ zu ersetzen. Wir schreiben also statt (3a-13) von jetzt an

$$\mathcal{L}_\sigma = i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi - \tfrac{1}{2}\sigma^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{N}}\,\bar{\psi}\psi\sigma. \qquad \text{(3a-16)}$$

Bevor wir darangehen können, konkrete Prozesse zu berechnen, müssen wir noch über die Renormierung sprechen. Dazu wollen wir einfachste Korrekturen zur 4-Punkt-Funktion betrachten, wie sie in Fig. 3 dargestellt sind. Dabei enthalten die Diagramme 3c und 3d ein-Teilchen-irreduzible (1PI) Strahlungskorrekturen zum σ-Propagator, bzw. zur Vertexfunktion, die in Fig. 4

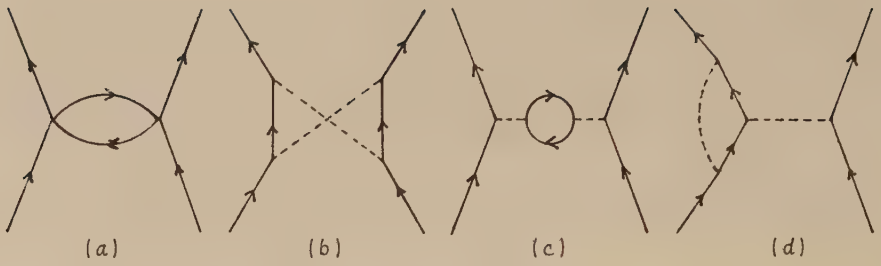


Fig 3: Einfachste Korrekturen zur 4-Punkt-Funktion.
(a) Diagramm gemäß $\mathcal{L}$,
(b) - (d) entsprechende Diagramme gemäß $\mathcal{L}_\sigma$.

nochmal gezeichnet sind. Da wir aus $\mathcal{L}_\sigma$ entnehmen, daß der freie ψ-Propagator im Impulsraum proportional zu $\not{p}/(p^2+i\varepsilon)$ und der freie σ-Propagator impulsunabhängig ist, lesen wir an Fig. 4 ab, daß die beiden Diagramme folgende im wesentlichen identische Integrale über innere Fermionimpulse als Faktor haben:

$$\text{(a) } \mathrm{Tr}\int d^4q \,\frac{\not{q}}{q^2+i\varepsilon}\,\frac{\not{q}-\not{k}}{(q-k)^2+i\varepsilon} \quad , \quad \text{(b) } \int d^4q \,\frac{\not{q}-\not{k}}{(q-k)^2+i\varepsilon}\,\frac{\not{q}}{q^2+i\varepsilon} \,. \qquad \text{(3a-17)}$$

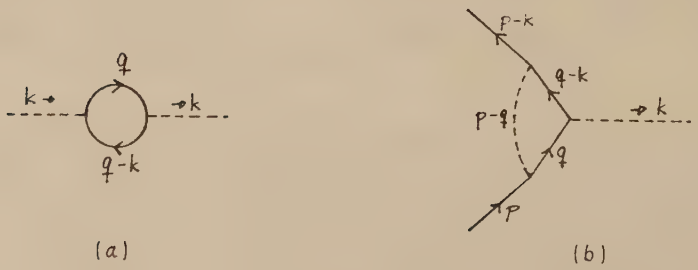


Fig. 4: Einfachste ein-Teilchen-irreduzible Korrekturen gemäß $\mathcal{L}_\sigma$
(a) zum σ-Propagator, (b) zum Vertexfaktor.

Diese Integrale sind offensichtlich logarithmisch ultraviolett-divergent - wie üblich in renormierbaren Theorien. Zur Regularisierung der Divergenzen wurden im Gross-Neveu-Modell vielfach Abschneideparameter benutzt, siehe z.B. [49]. Im Hinblick auf temperaturabhängige Feynman-Diagramme wäre so eine Regularisierung jedoch sehr ungeschickt, da wichtige Integralmanipulationen unbegrenzte Integrationsbereiche erfordern. Wir verwenden stattdessen die dimensionelle Regularisierung, wie sie fast gleichzeitig von 't Hooft und Veltman [76] bzw. Bollini und Giambiagi [77] erfunden wurde - ursprünglich, um Eichtheorien eichinvariant renormieren zu können. Hier soll nur kurz erläutert werden, was von dieser Methode für unsere Zwecke nützlich und nötig ist. Für weitere Einzelheiten sei auf den Review-Artikel von Leibbrandt verwiesen [78].

Die Idee der dimensionellen Regularisierung ist ganz einfach. Die grundlegende Tatsache ist, daß die Integrale in (3a-17) endlich wären, wenn wir statt über 2 über n Dimensionen integrieren würden, mit $n < 2$. Für große q wäre der Integrand dann wie $d^n q/q^2 \sim |q|^{n-3} d(|q|)$, so daß es keine Ultraviolettdivergenzen mehr gäbe. Wir können also die Theorie endlich machen, wenn wir zu $n < 2$ Dimensionen übergehen. Dazu hat die Lagrangedichte (3a-16) die Dimension (Länge)$^{-n}$, also dim $\mathcal{L} = -n$ und daher dim $\bar{\psi}\psi = 1-n$, dim $\sigma = -\frac{n}{2}$ und dim $\lambda = \frac{n}{2} - 1$. Damit ist noch nichts gewonnen, da ja am Ende der Rechnung $n \to 2$ vollzogen werden muß, wodurch die Unendlichkeiten wiedergeboren werden. Was noch geschehen muß, ist die Einführung von Renormierungskonstanten in der üblichen Weise gemäß

$$\begin{aligned} \psi &\to \sqrt{Z_\psi}\,\psi, \\ \sigma &\to \sqrt{Z_\sigma}\,\sigma, \\ \lambda &\to \mu^{1-n/2} Z_\psi^{-1} \frac{1}{\sqrt{Z_\sigma}} Z_\lambda \lambda, \end{aligned} \qquad \text{(3a-18)}$$

wobei wir gleich dafür gesorgt haben, daß das renormierte λ wieder dimensionslos ist, indem der Renormierungsparameter μ eingeführt wurde, der die Dimension einer Masse oder (Länge)$^{-1}$ hat. Um in der Lagrangedichte die Korrekturterme zu separieren, schreiben wir statt Z jeweils $(1+z)$, so daß die Ersetzungen

(3a-18) in der Lagrangedichte (3a-16) zu

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i\partial\!\!\!/ \psi - \tfrac{1}{2}\sigma^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{N}}\mu^{1-n/2}\bar{\psi}\psi\sigma + \tag{3a-19}$$
$$+ Z_4\bar{\psi} i\partial\!\!\!/ \psi - \tfrac{1}{2}Z_\sigma\sigma^2 + Z_\lambda\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\mu^{1-n/2}\bar{\psi}\psi\sigma$$

führen. Für γ-Matrizen und Integrale in n Dimensionen gelten die folgenden Rechenregeln [78]:

$$\begin{aligned} &g^\mu{}_\mu = n\,, \\ &\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\,, \\ &\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 2^{n/2}g^{\mu\nu}\,, \\ &\int d^n p\; p^\mu p^\nu f(p^2) = \frac{1}{n}g^{\mu\nu}\int d^n p\; p^2 f(p^2)\,. \end{aligned} \tag{3a-20}$$

Alles weitere ist aus diesen Regeln ableitbar , z.B.

$$\begin{aligned} \gamma_\mu p\!\!\!/\,\gamma^\mu &= \gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu p_\nu = (-\gamma_\mu\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma_\mu\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\})p_\nu = \\ &= \left(-\tfrac{1}{2}\{\gamma_\mu,\gamma^\mu\}\gamma^\nu + 2\gamma^\nu\right)p_\nu = \\ &= (2 - g^\mu{}_\mu)\,p\!\!\!/ = (2-n)\,p\!\!\!/\,, \end{aligned} \tag{3a-21}$$

oder auch

$$\mathrm{Tr}(p\!\!\!/\,q\!\!\!/) = p_\nu q_\mu\,\mathrm{Tr}(\gamma^\nu\gamma^\mu) = 2^{n/2}p_\nu q^\nu = 2^{n/2}p\cdot q\,. \tag{3a-22}$$

Insbesondere gilt für die $\mathbb{1}$ des Spinorraums

$$\mathrm{Tr}\,\mathbb{1} = 2^{n/2} \tag{3a-23}$$

was einfach aus

$$p\!\!\!/\,p\!\!\!/ = p^2$$

durch Spurbildung auf beiden Seiten folgt.

Schließen wir diesen Abschnitt durch Angabe der Feynman-Regeln, die zur Lagrangedichte (3a-19) gehören. Man kann sie auf bekannte Weisen gewinnen (siehe z.B. [50]). Wegen der

Einfachheit von $\mathcal{L}$ können sie hier sogar direkt abgelesen werden. In Fig. 5 sind die graphischen Elemente aufgelistet.

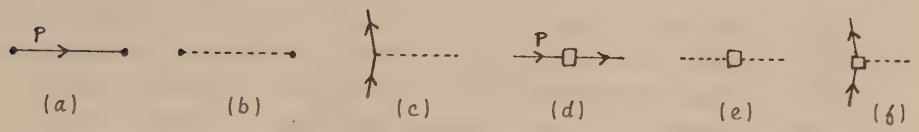


Fig. 5: Elemente der Feynman-Graphen zu $\mathcal{L}$ aus (3a-19).

Ihnen entsprechen im Impulsraum die Ausdrücke (vgl. auch [79])

(a) freier ψ-Propagator: $\dfrac{i}{(2\pi)^n}\,\dfrac{\not p}{p^2+i\varepsilon}$,

(b) freier σ-Propagator: $\dfrac{i}{(2\pi)^n}\,\dfrac{1}{0-1+i\varepsilon} = \dfrac{1}{(2\pi)^n i}$,

(c) Vertexfaktor: $(2\pi)^n i\,\dfrac{\lambda}{\sqrt{N}}\,\mu^{1-n/2}$, (3a-24)

(d) ψ-Massenkorrekturterm: $(2\pi)^n i\, z_q \not p$,

(e) σ-Massenkorrekturterm: $\dfrac{(2\pi)^n}{i}\, z_\sigma$,

(f) Vertexkorrekturterm: $(2\pi)^n i\, z_\lambda\,\dfrac{\lambda}{\sqrt{N}}\,\mu^{1-n/2}$,

wobei die Reihenfolge den Summanden in (3a-19) entspricht. Über freie innere Impulse ist ein n-dimensionales Integral zu bilden, z.B. $\int d^n p$. Die stets auftretenden Faktoren $(2\pi)^n$ sind dabei in (3a-24) schon berücksichtigt. Für geschlossene Fermion-Schleifen gilt zusätzlich, daß sie wegen der Fermi-Statistik einen Faktor (-1) und wegen der Spurbildung im U(N)-Raum einen Faktor N erhalten, wobei dann noch die Spur im Spinorraum ausgeführt werden

muß. (Alternativ könnte man sagen, daß Fermion-Schleifen einen Faktor N erhalten, um die N Fermionen zu zählen, die die Schleife bilden können.) Außerdem haben Diagramme, die durch Vertauschen von Fermionen auseinander hervorgehen, ein relatives Minuszeichen aufgrund der Fermi-Statistik.

Zur Illustration dieser Regeln berechnen wir z_σ zur Renormierung des Vakuumpolarisations-Beitrags zum σ-Propagator, wie er in Fig. 4a dargestellt ist. Da dieser $\sigma\sigma$-Eigen-Vertex ("proper vertex") in dem Streudiagramm Fig. 3c benötigt wird und dort der durchgehende Impuls raumartig ist, wählen wir einen raumartigen Renormierungspunkt $k^2 = -\mu^2$. Wir bestimmen also z_σ aus der in Fig. 6 dargestellten Gleichung, die für $k^2 = -\mu^2$ erfüllt sein soll.

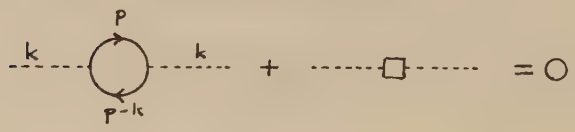


Fig. 6: Zur Berechnung von z_σ in niedrigster Ordnung.

Mit den Feynman-Regeln übersetzen wir Fig. 6 und erhalten

$$\left[(2\pi)^4 i\,\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\,\mu^{1-4/2}\right]^2 (-1)\,N\,\mathrm{Tr}\int d^4p\,\frac{i}{(2\pi)^4}\,\frac{\not p}{p^2+i\varepsilon}\,\frac{i}{(2\pi)^4}\,\frac{\not p-\not k}{(p-k)^2+i\varepsilon}\Bigg|_{k^2=-\mu^2} + \frac{(2\pi)^4}{i}\,z_\sigma = 0\,,$$

oder nachdem wir von (3a-22) Gebrauch gemacht haben:

$$z_\sigma = \frac{i}{(2\pi^2)^{4/2}}\,\lambda^2\mu^{2-4}\int d^4p\,\frac{p\cdot(p-k)}{(p^2+i\varepsilon)\,((p-k)^2+i\varepsilon)}\Bigg|_{k^2=-\mu^2}\,. \qquad \text{(3a-25)}$$

Da das Integral in (3a-25) bei $k\to 0-k$ und der anschließenden Integraltransformation $p\to -p$ in sich selbst übergeht, kann sein Wert tatsächlich nur von $k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 = -\mu^2$ abhängen. Wenn wir aber

etwa $k^\circ = 0$ und $|\vec{k}| = \mu$ wählen, so sehen wir, daß der Integrand Pole hat bei $p^\circ = \pm(|\vec{p}| - i\varepsilon)$ und $p^\circ = \pm(|\vec{p} - \vec{k}| - i\varepsilon)$, d.h. nur im 2. und 4. Quadranten. Wir können daher in der komplexen p°-Ebene den Integrationsweg um $\pi/2$ drehen und entlang der komplexen Achse integrieren. Diese sogenannte Wick-Rotation ist in Fig. 7 illustriert.

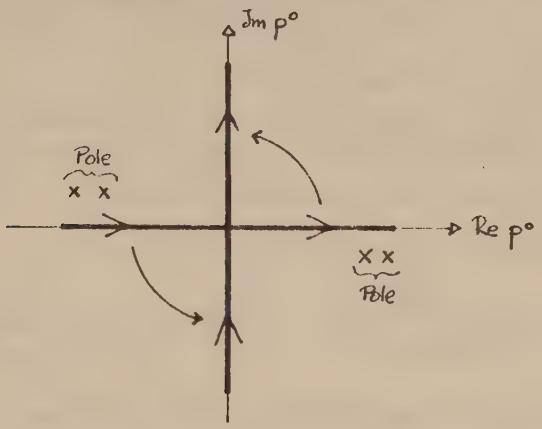


Fig. 7: Zur Wick-Rotation.

Formal bedeutet das den Übergang vom Minkowski-Raum zum Euklidischen Raum gemäß

$$p^0 \to i\tilde{p}^0 \quad , \quad p \to \tilde{p} = (\tilde{p}^0, \vec{p}) \quad , \qquad \text{(3a-26)}$$
$$dp^0 \to i\,d\tilde{p}^0 \, ,$$
$$d^4p \to i\,d^4\tilde{p}$$

und entsprechend für k . Für Skalarprodukte bedeutet das einen Vorzeichenwechsel,

$$p \cdot k \to -\tilde{p} \cdot \tilde{k} \quad , \qquad \text{(3a-27)}$$

da wir für Euklidische Vektoren, die hier und im Folgenden durch Tilden $\tilde{\ldots}$ gekennzeichnet werden, das normale Euklidische Skalar-

produkt verwenden wollen.
Nach der Wickrotation in (3a-25) haben wir also

$$Z_\sigma = \frac{1}{(2\pi^2)^{n/2}} \lambda^2 \mu^{2-n} \int d^n\tilde{p}\, \frac{\tilde{p}\cdot(\tilde{p}-\tilde{k})}{\tilde{p}^2\,(\tilde{p}-\tilde{k})^2}\Bigg|_{\tilde{k}^2=+\mu^2} , \qquad (3a\text{-}28)$$

worin die "$i\varepsilon$" jetzt überflüssig sind. Zur Vereinfachung des Nenners in (3a-28) benützen wir den Feynmanschen Trick

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 d\alpha\, \frac{1}{[(1-\alpha)a+\alpha b]^2} . \qquad (3a\text{-}29)$$

Für $a=\tilde{p}^2$ und $b=(\tilde{p}-\tilde{k})^2$ haben wir

$$(1-\alpha)\tilde{p}^2 + \alpha(\tilde{p}-\tilde{k})^2 = (\tilde{p}-\alpha\tilde{k})^2 + \alpha(1-\alpha)k^2 ,$$

so daß wir nach der Verschiebung

$$\tilde{p} \to \tilde{p} + \alpha\tilde{k}$$

aus (3a-28) die Gleichung

$$Z_\sigma = \frac{1}{(2\pi^2)^{n/2}} \lambda^2 \mu^{2-n} \int_0^1 d\alpha \int d^n\tilde{p}\, \frac{\tilde{p}^2 - (1-2\alpha)\tilde{p}\cdot\tilde{k} - \alpha(1-\alpha)\tilde{k}^2}{[\tilde{p}^2+\alpha(1-\alpha)\tilde{k}^2]^2}\Bigg|_{\tilde{k}^2=+\mu^2} \qquad (3a\text{-}30)$$

erhalten. Hierin trägt das Integral über $(1-2\alpha)\tilde{p}\cdot\tilde{k}$ aus zwei Gründen nichts bei; erstens ist es ungerade bezüglich $\tilde{p}\to-\tilde{p}$, und zweitens ist es ungerade bezüglich $\alpha\to 1-\alpha$. Das verbleibende Integral ist von der Art

$$\int d^n p\, f(p^2) ,$$

worauf wir die Regel

$$\int d^n p\, f(p^2) = \frac{2\sqrt{\pi}^n}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty Q^{n-1} dQ\, f(Q^2) \qquad (3a\text{-}31)$$

anwenden, die einfach die Ausintegration des Winkelanteils meint. Somit wird aus (3a-30)

$$Z_\sigma = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})} \lambda^2 \mu^{2-n} \int_0^1 d\alpha \int_0^\infty Q^{n-1} \frac{Q^2 - \alpha(1-\alpha)\mu^2}{[Q^2+\alpha(1-\alpha)\mu^2]^2}\, dQ ,$$

was wegen

$$\int_0^\infty \frac{Q^\alpha}{(Q^2+q^2)^\beta}\,dQ = \frac{1}{2}\,q^{\alpha-2\beta+1}\int_0^\infty \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{(1+t)^\beta}\,dt = \tag{3a-32}$$

$$= \frac{1}{2}\,q^{\alpha-2\beta+1}\,B\left(\frac{\alpha+1}{2},\,\beta-\frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,q^{\alpha-2\beta+1}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\beta-\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)}$$

das folgende Ergebnis impliziert:

$$Z_\sigma = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}}\,\Gamma(1-n/2)\,(n-1)\int_0^1 \frac{dx}{[x(1-x)]^{1-n/2}}\,. \tag{3a-33}$$

(Da λ wie Z_σ dimensionslos ist, darf natürlich keine μ-Abhängigkeit übrigbleiben). Für $n \to 2$ hat Z_σ also einen einfachen Pol der Form

$$\frac{\lambda^2}{2\pi}\,\frac{1}{1-n/2}$$

der einer logarithmischen Abhängigkeit von einem Abschneideparameter entspricht.

Diese recht ausführliche Berechnung von Z_σ soll als Beispiel für die Technik der n-dimensionalen Integration gelten. Solche eher technischen Details werden von hier ab in aller Regel vom Text in den Anhang verbannt, um die Betrachtungen nicht mit Einzelheiten zu stören.

3b) Näherungen und ihre Brauchbarkeit

Das Gross-Neveu-Modell ist zwar ein Modell, also sozusagen vereinfachte Wirklichkeit, aber es ist doch so kompliziert, daß es nicht lösbar ist. Der Grund dafür sind natürlich die Nichtlinearitäten in den Bewegungsgleichungen (3a-14) bzw. (3a-15). Nur für den Spezialfall N = 1 (Thirring-Modell) kann man die vollständige exakte S-Matrix angeben (siehe z.B. die Arbeit von Ruijsenaars [80]); aber der Fall N = 1 ist in mancher Hinsicht eine Ausnahme. In aller Regel muß man also Näherungen

machen, wenn man zu quantitativen Aussagen kommen will. Welche Näherung soll man nun aber wählen?

Naheliegend ist eine Entwicklung nach der Kopplungskonstanten g oder λ, so wie man in der QED nach der Feinstrukturkonstanten α entwickelt. Leider kann man aber gar keine vernünftige Entwicklung nach g oder λ machen, weil genaugenommen die Kopplungskonstante kein freier Parameter der Theorie ist. Der freie Parameter ist die dynamische Fermionmasse m, wie wir schon im Zusammenhang mit Gl. (3a-7) gesehen haben. Weder μ noch λ eignen sich als Entwicklungsparameter, da sie zusammen nur die Skala der Theorie festlegen, indem sie m definieren. Das ist zwar auf den ersten Blick verblüffend, aber wie das folgende Beispiel [81] zeigt, weder ungewöhnlich noch auf die Quantenfeldtheorie beschränkt.

Betrachten wir das Coulomb-Problem der Quantenmechanik. Dort lautet der Hamilton-Operator für das Wasserstoffatom

$$H = \frac{1}{2m} p^2 - \frac{e^2}{r}. \tag{3b-1}$$

Wenn wir die Vertauschungsrelationen

$$[r_j, p_k] = i\hbar\,\delta_{jk} \tag{3b-2}$$

noch dazuschreiben, so sehen wir, daß wir insgesamt 3 Parameter haben: $m, e^2, \hbar$. Aber wir können keinen davon als Entwicklungsparameter benutzen, denn alle 3 zusammen definieren nur die Skala der Theorie. Das wird offensichtlich, wenn wir r_j in Bohrschen Radien $a_0 = \frac{\hbar}{me^2}$ und p_j in entsprechenden Bohrschen Einheiten $\frac{\hbar}{a_0}$ messen. In den durch

$$r_j = a_0 R_j \quad , \quad p_j = \frac{\hbar}{a_0} P_j \tag{3b-3}$$

definierten dimensionslosen Größen R, P geschrieben, lesen sich (3b-1) und (3b-2) wie

$$H = \frac{me^4}{\hbar^2}\left(\frac{1}{2} P^2 - \frac{1}{R}\right) \tag{3b-4}$$

und

$$[R_j, P_k] = i\delta_{jk} , \qquad (3b\text{-}5)$$

so daß wir jetzt gar keine Parameter mehr haben, sondern nur noch einen "over-all"-Faktor, nämlich die (doppelte) Rydberg-Energie $\frac{me^4}{\hbar^2}$ zu deren Definition alle drei ursprünglichen Parameter $m, e^2, \hbar$ benötigt werden. Eine Reskalierung der Energie und der Zeit würde auch diesen "over-all"-Faktor noch verschwinden lassen. Natürlich ist die Rydberg-Energie eine wichtige Observable, aber sie hat eben nichts zu tun mit den Details des Wasserstoffspektrums, sondern nur mit der Energieskala. Es handelt sich hier auch um keine Extravaganz des H-Atoms, die Reskalierung (3b-3) ist bei n-Elektronen-Atomen mit demselben Effekt durchführbar, weil die Elektron-Elektron-Terme der potentiellen Energie ebenfalls von der Form e^2/r sind.

Die Rolle der Rydberg-Energie in der Atomphysik übernimmt im Gross-Neveu-Modell die dynamische Fermion-Masse m. Allerdings muß man in der Atomphysik nur reskalieren, während in der Quantenfeldtheorie die Renormierung ins Spiel kommt; sonst hätte man ja im Gross-Neveu-Modell gar keinen dimensionsbehafteten Parameter. Aber der Renormierungsparameter μ ist a priori unphysikalisch. Das hat zur Folge, daß man auch der Kopplungskonstanten λ keine physikalische Signifikanz beimessen kann. Denn beide Größen zusammen definieren eben nur die Skala vermöge

$$m = \mu f(\lambda^2) , \qquad (3b\text{-}6)$$

wobei wir allerdings von f vorläufig nur wissen, daß es für $\lambda = 0$ verschwindet, ohne dabei um diesen Punkt eine Taylorreihe zu besitzen. Wir haben uns das ja schon im Anschluß an Gleichung (3a-7) überlegt.

Die Unmöglichkeit einer störungstheoretischen Entwicklung ist keine Eigenschaft, die auf das Gross-Neveu-Modell beschränkt ist. Auch in der QCD hat man einen Parameter, Λ_{QCD}, der auf

analoge Weise wie m in (3b-6) vom Renormierungspunkt und der Kopplungskonstanten abhängt (für weitere Einzelheiten sei auf den aktuellen Artikel von Roberts verwiesen [82]). Es liegt nahe, daß alle skaleninvarianten Lagrangedichten durch die Renormierung auf eine Gleichung der Form (3b-6) führen, so daß auf dynamische Weise ein Maßstab für die auftretenden Massen und Energien erzeugt wird. Im Gross-Neveu-Modell ist der skalenerzeugende Mechanismus sehr durchsichtig, was einer der Gründe für die Attraktivität des Modells ist.

Eine Entwicklung nach Potenzen von λ verbietet sich also. Nun gibt es für quantisierte Felder noch die beliebte Möglichkeit, Diagramme statt nach der Potenz der Kopplungskonstanten, nach der Anzahl geschlossener Schleifen ("Loops") zu klassifizieren. Die folgende von Coleman und E. Weinberg [66,83] stammende Überlegung zeigt, nach was für einem Parameter man tatsächlich entwickelt, wenn man die Loop-Entwicklung durchführt. Wenn wir statt der eigentlichen Lagrangedichte $\mathcal{L}$ die von dem Parameter η abhängige Lagrangedichte $\mathcal{L}_\eta$ mit

$$\mathcal{L}_\eta = \frac{1}{\eta}\mathcal{L} \qquad \text{(3b-7)}$$

betrachten, so sehen wir, daß jetzt alle Propagatoren einen Faktor η und alle Vertices einen Faktor $\frac{1}{\eta}$ zusätzlich haben. Ein ein-Teilchen-irreduzibles Diagramm (es genügt sich auf diese zu beschränken) mit I inneren Linien und V Vertices ist demnach von der Ordnung $P = I - V$ in η. Dieses Diagramm hat zunächst I freie Impulse auf den inneren Linien; nun hat aber jeder Vertex eine δ-Funktion, die Impulserhaltung garantiert; eine davon wird benötigt um für das ganze Diagramm den Impuls zu erhalten, so daß V - 1 Nebenbedingungen für die freien Impulse gelten. Insgesamt muß man also schließlich über I - V + 1 Impulse integrieren. Oder anders argumentiert: Bei A äußeren Linien hat man a priori A + I Impulse im Diagramm; Impulserhaltung an den Vertices gibt V Nebenbedingungen, so daß A + I - V Impulse noch nicht festgelegt sind; (A - 1) Bedingungen legen zusammen mit der Gesamtimpulserhaltung die äußeren Impulse fest; somit bleiben I - V + 1 Impulse übrig, über die integriert werden muß.

Andererseits ist die Anzahl L der Loops gerade die Anzahl der auszuführenden Impulsintegrale, also $L = I - V + 1$. (Das ist wie bei einem elektrischen Netzwerk.) Das Diagramm ist also von der Ordnung $P = L - 1$ in η, und die Loop-Entwicklung ist eine Entwicklung nach Potenzen von η. Die nackten, d.h. strahlungskorrekturfreien Vertices haben dabei die Ordnung η^{-1}, die ein-Loop-Graphen die Ordnung η^0, usw. Zur Illustration dieser topologischen Überlegung diene Fig. 8, in der die Linien beliebige, nicht notwendig gleiche, Propagatoren einer beliebigen Lagrangedichte $\mathcal{L}$ bedeuten. Die hier gemachte Überlegung erfordert ja keine detaillierten Kenntnisse über $\mathcal{L}$.

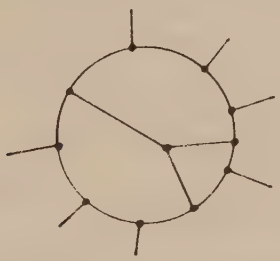


Fig. 8: Ein Graph mit I = 13, V = 11 und L = 3; zur Illustration von L = I - V + 1. Wenn die Impulse auf den 7 äußeren Linien festliegen, sind 3 der inneren Impulse unbestimmt, also 3 Integrationen sind nötig.

Wenn man nun, wie das im nächsten Abschnitt geschieht, alle Diagramme mit einem Loop und beliebig vielen äußeren Linien in bestimmter Weise aufsummiert, um das effektive Potential zu erhalten, so berücksichtigt man tatsächlich beliebige Ordnungen der Kopplungskonstanten und kann nicht-störungstheoretische Effekte berechnen. Soweit ist alles in Ordnung, und man könnte die Loop-Entwicklung benutzen, wenn nicht folgendes Problem wäre. Sobald man nämlich zu Diagrammen mit zwei Loops übergeht, hat man zwar in der genannten Weise immer noch beliebige Ordnungen der Kopplungskonstanten, aber im Vergleich zur ein-Loop-Rechnung

macht der zusätzliche Loop in jedem Diagramm nur einen zustätzlichen Faktor $\lambda^{\sim}$. Das wird sofort etwas konkreter, wenn wir Fig. 9 anschauen.

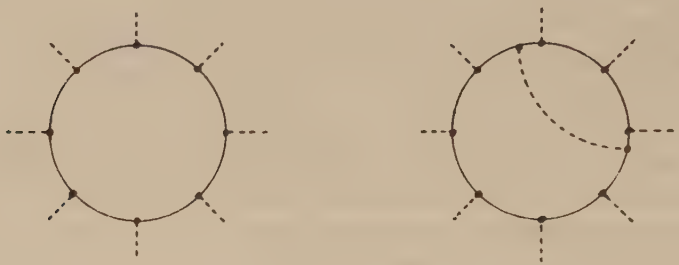


Fig. 9: Zwei Beiträge zum effektiven Potential von derselben (achten) Ordnung im äußeren Feld.

(a) Der ein-Loop-Graph.

(b) Einer der zwei-Loop-Graphen.

Der Graph 9a ist von der Ordnung $\lambda^8\eta^0$, der Graph 9b dagegen von der Ordnung $\lambda^{10}\eta$. Für $\eta=1$, was uns ja interessiert, bleibt nur eine Korrektur der Ordnung λ^2 übrig. Somit ist die Verbesserung der zwei-Loop-Näherung gegenüber der ein-Loop-Näherung doch wieder nur von der Ordnung λ^2 , also in gewisser Weise störungstheoretischer Natur, nicht jedoch von beliebiger Ordnung in λ , wie man das gern hätte. Während die ein-Loop-Rechnung brauchbare Ergebnisse liefert, kann man von der zwei-Loop-Rechnung keine Verbesserung erwarten. Die Details dazu liefert der Abschnitt 3d, und sie unterstreichen die gemachten Folgerungen.

Bisher haben wir nocht nichts über die physikalische Bedeutung des Parameters η der Loop-Entwicklung gesagt. Für die Felder, die in $\mathcal{L}$ in (3b-7) vorkommen und die wir hier mal mit ϕ bezeichnen wollen, und deren Impulse $\pi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}$ gilt die Vertauschungsrelation

$$[\phi(x),\pi(y)]_{\substack{|\\ x^0=y^0}} = i\hbar\,\delta(\vec{x}-\vec{y}), \qquad \text{(3b-8)}$$

wobei wir $\hbar$ ausdrücklich hingeschrieben haben. Nehmen wir stattdessen $\mathcal{L}_\eta$ und π_η, so muß (3b-8) ebenfalls erfüllt sein. Nun ist aber $\pi_\eta = \frac{i}{\eta}\pi$, so daß wir

$$[\phi(x), \pi(y)]_{|x^0=y^0} = i\eta\,\hbar\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) = i\hbar'\delta(\vec{x}-\vec{y}) \qquad (3b\text{-}9)$$

als Ersatz von (3b-8) bekommen, worin ein modifiziertes Wirkungsquantum $\hbar'$ vorkommt. Die Loop-Entwicklung ist also eine Entwicklung nach Potenzen von $\eta = \hbar'/\hbar$, weshalb man auch davon spricht, daß man "nach Potentzen von $\hbar$" entwickelt. Somit ist die Loop-Entwicklung besonders geeignet für Untersuchungen des klassischen Grenzwertes, $\hbar \to 0$ oder genauer $\hbar'/\hbar = \eta \to 0$. Man kann auch anders einsehen, daß die Loop-Entwicklung eine Entwicklung nach $\hbar$ ist: Die S-Matrix ist gegeben durch das zeitgeordnete Produkt [84]

$$S = \left(\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int \mathcal{L}_{WT}(x)\, d^4x\right)\right)_+ , \qquad (3b\text{-}10)$$

worin $\mathcal{L}_{WT}$ der Wechselwirkungsteil der Lagrangedichte ist. In (3b-10) spielt $\hbar$ dieselbe Rolle wie η in (3b-7); und die Folgerung, daß eine Potenzreihe in η eine Entwicklung nach $\hbar$ ist, liegt auf der Hand.

Wie wir gesehen haben, leistet die Loop-Entwicklung nur bei der ersten Näherung mehr als die Störungsrechnung, während höhere Ordnungen nur störungstheoretische Verbesserungen bringen. Allerdings besitzt die Loop-Entwicklung gegenüber anderen Näherungsverfahren einen einzigartigen Vorteil: Da der Entwicklungsparameter η in (3b-7) ein die gesamte Lagrangedichte multiplizierender Faktor ist, spielt es für die Glieder einer Potenzreihe in η keine Rolle, wie man die Lagrangedichte in einen freien und einen wechselwirkenden Teil zerlegt. Diese Tatsache kann bei komplizierten Berechnungen oft vorteilhaft benutzt werden, sei es auch nur für Kontrollrechnungen, die eine andere Zerlegung der Lagrangedichte benutzen.

Weder die störungstheoretische Entwicklung nach der Kopplungskonstanten noch die Loop-Entwicklung sind also geeignet, um

systematisch nichtstörungstheoretische Effekte zu berechnen. Mit "systematisch nichtstörungstheoretisch" ist hier gemeint, daß die nächste Ordnung im Entwicklungsparameter sich von der vorhergehenden nicht nur durch endliche Potenzen der Kopplungskonstanten unterscheidet. Da die offensichtlichen Parameter λ und $\hbar$ (bzw. η) sich als ungeeignet erwiesen haben, muß man sozusagen einen "versteckten" Parameter finden. Dieser Parameter ist die Anzahl der Farben N, genauer $(1/N)$. Zunächst mag es befremdlich erscheinen, eine offenbar fixierte Größe der Lagrangedichte als Parameter zu nehmen. Es ist jedoch durchaus möglich, eine vernünftige Entwicklung nach Potenzen von $(1/N)$ durchzuführen. Das liegt unter anderem daran, daß sich für $N \to \infty$ die Dynamik vereinfacht. Als Beispiel dafür diene noch einmal das Wasserstoffatom, das -wie wir oben überlegt haben- auch keinen offensichtlichen Parameter besitzt.

Nach der Feststellung der Parameterlosigkeit des Wasserstoffatoms, charakerisiert durch den Hamiltonoperator H aus (3b-1) im Verein mit den Vertauschungsrelationen (3b-2), setzt sich Wittens Argument folgendermaßen fort [81]. Wir vergessen für den Augenblick, daß wir das Spektrum von (3b-1) exakt berechnen können, und suchen nach einem Parameter, der auf systematische Weise eine genäherte Berechnung - sagen wir der Grundzustandsenergie - ermöglicht. Nun ist H rotationssymmetrisch, es hat eine O(3)-Symmetrie, die ihrem Ursprung nach zwar geometrisch ist, aber dennoch als Teil der exakten dynamischen Symmetrie O(4) angesehen werden kann. Man kann diese O(3)-Symmetrie als O(N)-Symmetrie mit N = 3 auffassen und betrachtet deshalb das Wasserstoffatom in 3 Dimensionen als Spezialfall desselben Problems in N Dimensionen. Auf diese Weise wird eine Entwicklung nach Potenzen in $(1/N)$ möglich. Zur Veranschaulichung berechnen wir die Grundzustandsenergie in nullter Näherung, d.h. bis zur Ordnung $(1/N)^0$. Das ist nicht schwierig, da sich die Dynamik für $N \to \infty$ stark vereinfacht.

Die Schrödinger-Gleichung zu H aus (3b-1) in N-Dimensionen lautet für radialsymmetrische Wellenfunktionen $\Psi(r)$ wie folgt:

$$\left[-\frac{1}{2m}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{N}{r}\frac{d}{dr}\right)-\frac{e^2}{r}\right]\Psi(r)=E\,\Psi(r), \qquad (3b\text{-}11)$$

worin wir $\hbar=1$ gesetzt und statt $(N-1)$ einfach N geschrieben haben, da wir Korrekturen der Ordnung $(1/N)$ vernachlässigen wollen. Die übliche Redefinition $\Psi(r)=r^{-N/2}\tilde{\Psi}(r)$ macht wegen

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{N}{r}\frac{d}{dr}\right)r^{-N/2}=r^{-N/2}\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{N(N+2)}{4r^2}\right)$$

unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $(1/N)$ aus (3b-11) die Gleichung

$$\left[-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{N^2}{8mr^2}-\frac{e^2}{r}\right]\tilde{\Psi}(r)=E\,\tilde{\Psi}(r),$$

woraus nach der Reskalierung $r=N^2\rho$

$$\left[-\frac{1}{2mN^2}\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1}{8m\rho^2}-\frac{e^2}{\rho}\right]\tilde{\Psi}(\rho)=N^2E\,\tilde{\Psi}(\rho) \qquad (3b\text{-}12)$$

wird. Das reduzierte eindimensionale Problem beschreibt also ein Teilchen mit der sehr großen Masse m^2N in dem Potential $V(\rho)=\frac{1}{8m\rho^2}-\frac{e^2}{\rho}$. Für sehr große N ist die Grundzustandsenergie einfach das Minimum von $V(\rho)$, was

$$E_0=-\frac{2me^4}{N^2}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right) \qquad (3b\text{-}13)$$

ergibt. Natürlich kann man das N-dimensionale Coulomb-Problem exakt lösen, und die von Nieto durchgeführten Rechnungen [85] führen auf die Grundzustandsenergie

$$E_0=-\frac{2me^4}{(N-1)^2}=-\frac{2me^4}{N^2}\left(1+\frac{2}{N}+\frac{3}{N^2}+\cdots\right). \qquad (3b\text{-}14)$$

Wie wir sehen, ist (3b-13) tatsächlich das richtige Ergebnis bis zur Ordnung $(1/N)^0$. Um für N = 3 eine Genauigkeit von etwa 10% zu erhalten, genügt es, bis zur Ordnung $(1/N)^2$ zu rechnen.

Für das H-Atom ist die $\frac{1}{N}$-Entwicklung zwar instruktiv, aber eigentlich überflüssig. Schon das He-Atom ist aber nicht mehr exakt lösbar, weil die Elektron-Elektron-Wechselwirkung berück-

sichtigt werden muß. Störungsrechnung ist nicht möglich, so daß in den Lehrbüchern Variationsverfahren benutzt werden. Eine Alternative dazu ist die $\frac{1}{N}$-Entwicklung, die keinen großen Aufwand erfordert. Weitere Einzelheiten sind in den Arbeiten von Mlodinow und Papanicolaou [86,87] zu finden. Andere Aspekte einer $\frac{1}{N}$-Entwicklung in der Quantenmechanik zeigen die neueren Arbeiten von Cant [88], Jevicki und Mitarbeitern [89-91] sowie ein Review von Jackiw [92].

Wichtiger als in der Quantenmechanik, ist die $\frac{1}{N}$-Entwicklung in der Quantenfeldtheorie, wobei das Gross-Neveu-Modell nur ein Beispiel von vielen ist. Insbesondere weiß man seit den Arbeiten von 't Hooft [58,93], daß man die Chromodynamik zu einer $U(N)$-Eichtheorie verallgemeinern kann, wodurch eine $\frac{1}{N}$-Entwicklung möglich wird. Das war der Anstoß zu einer Vielzahl von Arbeiten, die viele -vor allem qualitative- experimentelle Erkenntnisse plausibel machen konnten. Einen schönen Überblick gibt der Review von Witten [65], der eine Zusammenfassung dessen enthält, was man über Mesonen und Baryonen aus der $\frac{1}{N}$-Entwicklung gelernt hat. Daneben sei eine Auswahl neuerer Arbeiten gegeben [94-105], von denen hier nur [101] besonders genannt sein soll, da darin von Strominger gezeigt wird, daß bei Berücksichtigung kombinatorischer Faktoren der Feynman-Diagramme der tatsächliche Entwicklungsparameter nicht $1/N = 1/3$, sondern $1/(k^2N^2)$ ist, worin k ein topologischer Faktor ist, der für die QCD aus der ϱ-ω-Massendifferenz zu $k \approx 10$ abgeschätzt werden kann und daher $1/(k^2N^2) \approx 10^{-3}$ impliziert.

Andere Modelle, die sich für eine $\frac{1}{N}$-Entwicklung eignen, sind vor allem das sogenannte O(N)-Modell [91,106-108], das N Spinnull-Felder φ_a mit einer Wechselwirkung der Art $(\sum_{a=1}^{N} \varphi_a \varphi_a)^2$ beschreibt, sowie das nichtlineare σ-Modell und seine Verallgemeinerung , das CP^{N-1}-Modell [30,60,61,68-70,109,110]. Alle diese Modelle sind in dem Review von Coleman [53] beschrieben. Darüberhinaus ist man neuerdings dabei, auch nichtpolynomiale O(N)- oder U(N)-symmetrische Wechselwirkungen zu untersuchen [111-113]. Für unsere Betrachtungen ist folgendes Ergebnis des

O(N)-Modells besonders wichtig [108]: Im Falle spontaner Symmetriebrechung ist nur die $\frac{1}{N}$-Entwicklung Borel-summierbar, während die Störungsentwicklung und die Loop-Entwicklung überhaupt nicht konvergieren. Das ergänzt unsere Argumente über die Vorzüge der $\frac{1}{N}$-Entwicklung.

Wir wollen diesen Abschnitt schließen, indem wir erwähnen, daß vor kurzem von Nussinov ein interessanter, wenn auch spekulativer, Zusammenhang zwischen einer $\frac{1}{N}$-Entwicklung und üblichen Störungsrechnungen, etwa in der QED und bei tiefinelastischen QCD-Prozessen, aufgezeigt wurde [114]. Damit ist das Folgende gemeint: Nimmt man an, daß alle Quarks, Leptonen, Eichbosonen und Higgs-Teilchen aus fundamentalen F_j-Fermionen zusammengesetzt sind, dann ist die $\frac{1}{N}$-Entwicklung für die hoch symmetrische F_j-Dynamik im wesentlichen dasselbe wie Entwicklungen in den Kopplungskonstanten der zusammengesetzten ("composite") Felder, d.h. $\frac{1}{N} \sim \alpha_{QED} \sim \alpha_{weak} \sim \alpha_{QCD} \sim \cdots$. Übrigens folgt ja auch aus der oben erwähnten Arbeit von Strominger, daß $\alpha_{QCD} = 1/(k^3 N^4) \approx 10^{-3} \approx \frac{\alpha_{QED}}{4\pi}$; vielleicht ist also die Nussinovsche Spekulation doch nicht so abwegig.

3c) Thermische Korrekturen 1. Ordnung im Gross-Neveu-Modell

3c1) Das effektive Potential

Nach den vorbereitenden Betrachtungen der Abschnitte 3a und 3b kommen wir jetzt zu konkreten Berechnungen für das Gross-Neveu-Modell. Dabei geht es uns vornehmlich um die dynamische Brechung der chiralen Symmetrie. In der Sprache der Lagrangedichte (3a-19) bedeutet das

$$\langle vac | \sigma(x) | vac \rangle = \sigma_0(x) \neq 0 . \qquad (3c\text{-}1)$$

Darin ist $|vac\rangle$ der Grundzustand der Theorie, d.h. der Zustand mit der geringsten Energiedichte, den wir als (eigentliches) Vakuum bezeichnen wollen. Davon zu unterscheiden ist das zu $\mathcal{L}$ gehörige pertubative Vakuum $|0\rangle$, das durch

$$\sigma_f^{(+)}|0\rangle = 0,$$
$$\psi_f^{(+)}|0\rangle = 0, \qquad (3c\text{-}2)$$
$$\bar{\psi}_f^{(+)}|0\rangle = 0,$$

definiert ist, wobei die Felder $\sigma_f^{(+)}$, $\psi_f^{(+)}$ und $\bar{\psi}_f^{(+)}$ nur den Anteil positiver Frequenzen der zugehörigen Felder σ_f, ψ_f, $\bar{\psi}_f$ enthalten, welche sich nach dem freien Teil von $\mathcal{L}$ entwickeln. Es soll hier betont werden, daß $|0\rangle$ und $|vac\rangle$ nicht identisch sind, da (3c-2) die Gleichung

$$\langle 0|\,\sigma(x)\,|0\rangle = 0 \qquad (3c\text{-}3)$$

impliziert, während - wie wir sehen werden - unterhalb einer kritischen Temperatur (3c-1) erfüllt ist. Da das Vakuum translationsinvariant sein muß, ist $\sigma_0(x)$ in (3c-1) tatsächlich von x unabhängig, d.h. es gilt sogar

$$\langle vac|\,\sigma(x)\,|vac\rangle = \sigma_0 \neq 0\,. \qquad (3c\text{-}4)$$

Im Hinblick auf die Störungstheorie sollte man aber eine Theorie haben, in welcher $|vac\rangle$ und $|0\rangle$ identisch sind. Die entsprechende Lagrangedichte ist aus (3a-19) leicht zu konstruieren, indem man σ gemäß

$$\sigma \longrightarrow \sigma + \sigma_0 \qquad (3c\text{-}5)$$

umdefiniert. Für das neue σ gilt dann wie gewünscht

$$\langle vac|\,\sigma(x)\,|vac\rangle = 0. \qquad (3c\text{-}6)$$

Unter (3c-5) transformiert sich (3a-19) folgendermaßen:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_{sc} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ + m)\psi - \tfrac{1}{2}\sigma^2 - \sigma\sigma_0 + \frac{\lambda}{\sqrt{N}}\mu^{1-d/2}\bar{\psi}\psi\sigma + \qquad (3c\text{-}7)$$
$$+ \bar{\psi}(Z_\psi i\partial\!\!\!/ + Z_\lambda m)\psi - \tfrac{1}{2}Z_\sigma\sigma^2 - Z_\sigma\sigma\sigma_0 + Z_\lambda\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\mu^{1-d/2}\bar{\psi}\psi\sigma,$$

worin wir den reinen c-Zahlen-Term $-\frac{1}{2}(1+Z_\sigma)\sigma_0^2$ weggelassen haben. (Der Index "sc" steht für "selfconsistent" und wird später erläutert.)

In (3c-7) hat das Fermion-Feld eine Masse m, für die

$$m = \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \mu^{1-d/2} \sigma_0 \qquad (3c\text{-}8)$$

gilt. Da σ_0 die Dimension (Masse)$^{d/2}$ hat und keine pertubative Größe ist, sehen wir, daß (3c-8) gerade von der gesuchten Form

$$m = \mu f(\lambda) \qquad (3c\text{-}9)$$

ist. Wegen des nichtstörungstheoretischen Charakters dieses Ergebnisses, besitzt f keine Taylorreihe um $\lambda = 0$; ferner muß $f(0) = 0$ gelten, da für $\lambda = 0$ keine Wechselwirkung vorhanden ist, die die Symmetrie brechen könnte.

Die Tatsache der Symmetriebrechung sehen wir an zwei Stellen. Einmal ist (3c-4) mit der chiralen Symmetrie $\sigma(x) \to -\sigma(x)$ des ursprünglichen σ-Feldes nicht verträglich. Zum zweiten überträgt sich die chirale Symmetrie von (3a-19) auf (3c-7), d.h. (3c-7) ist invariant unter der Transformation

$$\begin{aligned} \bar{\psi} i\partial\!\!\!/ \psi &\to \bar{\psi} i\partial\!\!\!/ \psi , \\ \bar{\psi}\psi &\to -\bar{\psi}\psi , \\ \sigma &\to -\sigma - 2\sigma_0 , \end{aligned} \qquad (3c\text{-}10)$$

was einfach aus der ursprünglichen chiralen Transformation zusammen mit (3c-5) folgt. Nun ist (3c-10) aber nicht durch einen unitären Operator $\mathcal{U}$ im Hilbertraum der Zustände darstellbar. Denn wegen

$$\mathcal{U}|vac\rangle = e^{i\alpha}|vac\rangle ,$$

was eine Eigenschaft des Vakuums ist, würde aus (3c-6)

$$0 = \langle vac|\sigma|vac\rangle = \langle vac|\mathcal{U}^{-1}\sigma\mathcal{U}|vac\rangle = \langle vac|(-\sigma - 2\sigma_0)|vac\rangle = -2\sigma_0$$

folgen. Das ist aber im Widerspruch zu $\sigma_0 \neq 0$.

Wir sehen also, daß die Lagrangefunktion eine Symmetrie besitzt, die aber im Zustandsraum nicht manifestiert ist. Die chirale Symmetrie des Gross-Neveu-Modells ist daher gebrochen,

wodurch gemäß (3c-9) für das Fermion-Feld eine Masse generiert wird. Die Ursache dieser Symmetriebrechung sind Strahlungskorrekturen, weshalb man von dynamischer Symmetriebrechung spricht, im Gegensatz zur spontanen Symmetriebrechung, die gewissermaßen von Hand gemacht wird, indem man schon in die klassische Lagrangedichte ein Potential einsetzt, dessen Minima unter der Symmetrie des Potentials nicht invariant sind. (Die Bezeichnungen sind in der Literatur allerdings nicht einheitlich.)

Uns interessiert hier vor allem die generierte Fermion-Masse, wie sie in (3c-8) und (3c-9) gegeben ist. Die Aufgabe lautet also, σ_0 zu finden, d.h. wir suchen das Vakuum der Theorie, das wir als den Zustand niedrigster Energiedichte definiert haben. Andererseits brauchen wir $|vac\rangle$ selbst nicht zu kennen, da für unsere Zwecke die Kenntnis von σ_0 ausreicht. Das legt in Analogie zur Quantenmechanik das folgende Variationsproblem nahe. Ausgehend von der symmetrischen Lagrangedichte $\mathcal{L}$ aus (3a-19) suchen wir denjenigen Zustand $|\phi\rangle$, der den Erwartungswert der Hamiltondichte minimiert, d.h.

$$\langle\phi|\,\mathcal{H}\,|\phi\rangle = \text{Minimum}, \tag{3c-11}$$

wobei die Nebenbedingungen

$$\langle\phi|\phi\rangle = 1 \tag{3c-12}$$

und

$$\langle\phi|\,\sigma(x)\,|\phi\rangle = \sigma_c(x)$$

zu erfüllen sind. Das Minimum in (3c-11) ist eine Funktion von $\sigma_c(x)$,

$$V_{eff}(\sigma_c(x)).$$

Sie heißt effektives Potential und wird gewöhnlich ganz anders als hier definiert, wovon gleich noch die Rede sein wird. Wenn man V_{eff} gefunden hat, erhält man σ_0 einfach als Minimum von V_{eff}, d.h.

$$V_{eff}(\sigma_0) = \min_{\sigma_c} V_{eff}(\sigma_c). \tag{3c-13}$$

Wegen der Translationsinvarianz des Vakuums brauchen wir V_{eff} natürlich nur für konstante σ_c zu berechnen.

Die Nebenbedingungen (3c-12) sind am besten durch Lagrangesche Multiplikatoren $\mathcal{E}_{\mathcal{J}}(x)$ und $\mathcal{J}(x)$ zu berücksichtigen; damit erhält man aus dem Variationsproblem die Eigenwertgleichung

$$\left(\mathcal{H} - \mathcal{E}_{\mathcal{J}}(x) - \mathcal{J}(x)\,\sigma(x)\right)|\phi\rangle = 0 \,. \qquad \text{(3c-14)}$$

Die Bedeutung der Multiplikatoren ist demnach einfach zu verstehen. $\mathcal{E}_{\mathcal{J}}(x)$ ist die Energiedichte des Zustandes $|\phi\rangle$ mit $\mathcal{H}-\mathcal{J}\sigma$ als Energiedichteoperator, und $\mathcal{J}(x)$ ist eine klassische (äußere) Stromdichte, die an σ koppelt. $\mathcal{E}_{\mathcal{J}}(x)$ hängt natürlich auf funktionale Weise von $\mathcal{J}(x)$ ab. Wenn wir die Definition des effektiven Potentials und die Nebenbedingunen (3c-13) berücksichtigen, können wir (3c-14) in

$$V_{eff}\left(\sigma_c(x)\right) = \langle\phi|\,\mathcal{H}\,|\phi\rangle = \mathcal{E}_{\mathcal{J}}(x) + \mathcal{J}(x)\,\sigma_c(x) \qquad \text{(3c-15)}$$

umschreiben. Jetzt müssen wir nur noch $\mathcal{J}(x)$ zugunsten von $\sigma_c(x)$ eliminieren. Weil aus (3c-15) die Gleichung

$$\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}}\,\mathcal{E}_{\mathcal{J}} = -\,\sigma_c \qquad \text{(3c-16)}$$

folgt, geschieht diese Elimination durch die Legendre-Transformation

$$V_{eff}\left(\sigma_c\right) = \mathcal{J}\sigma_c + \mathcal{E}_{\mathcal{J}} = \mathcal{E}_{\mathcal{J}} - \mathcal{J}\,\frac{\delta\mathcal{E}_{\mathcal{J}}}{\delta\mathcal{J}} \,. \qquad \text{(3c-17)}$$

Das im Anhang A gegebene einfache Beispiel aus der Quantenmechanik soll den Gedankengang von (3c-11) bis (3c-17) nochmal erläutern.

Bisher haben wir noch keine brauchbare Möglichkeit aufgezeigt, wie man V_{eff} berechnen kann. Glücklicherweise hängt jedoch V_{eff} auf elementare Weise mit den Greenschen Funktionen der Theorie zusammen. Das wird deutlich, wenn wir uns die übliche Definition von V_{eff} ansehen, was jetzt geschehen soll. Anschließend

wollen wir uns überlegen, daß unser V_{eff} mit dem üblichen V_{eff} übereinstimmt.

Von Schwinger stammt die ursprüngliche Idee, Greensche Funktionen über erzeugende Funktionale zu berechnen [115]. Die hier gegebene Darstellung ist dem Buch von Fried [116], sowie Artikeln von Zumino [117], Coleman [83], Jona-Lasinio [118] und Symanzik [119,120] angelehnt. Das erzeugende Funktional $\mathcal{Z}\{J\}$ aller σ-ν-Punkt-Funktionen $G^{(\nu)}(x_1 \dots x_\nu)$, die als zeitgeordnete Vakuumserwartungswerte

$$G^{(\nu)}(x_1 \dots x_\nu) = \langle vac | \left(\sigma(x_1) \cdots \sigma(x_\nu)\right)_+ | vac \rangle \qquad (3c\text{-}18)$$

definiert sind, ist definitionsgemäß durch

$$\mathcal{Z}\{J\} = \sum_\nu \frac{i^\nu}{\nu!} \int d^n x_1 \cdots d^n x_\nu \; G^{(\nu)}(x_1 \dots x_\nu) J(x_1) \cdots J(x_\nu) \qquad (3c\text{-}19)$$

gegeben. Es erzeugt die Greenschen Funktionen durch Differentiation:

$$i^\nu G^{(\nu)}(x_1 \cdots x_\nu) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_\nu)} \; \mathcal{Z}\{J\}\Big|_{J=0} , \qquad (3c\text{-}20)$$

wobei die Symmetrie der Greenschen Funktionen gerade die Fakultät in der Definition (3c-19) neutralisiert. In $G^{(\nu)}(x_1 \cdots x_\nu)$ sind alle Prozesse mit ν σ-Teilchen enthalten, für $\nu=4$ beispielsweise die Graphen in Fig. 10.

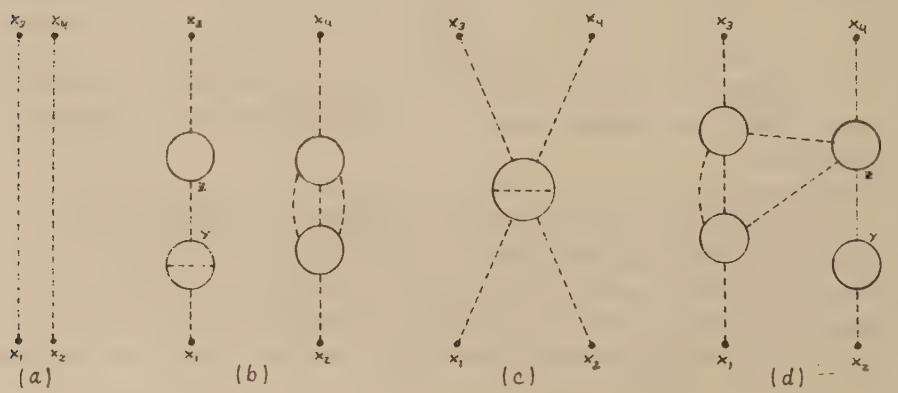


Fig. 10: Beiträge zu $G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Es treten Graphen verschiedener Topologie auf: Fig. 10a und 10b sind unverbunden und daher Beiträge zu dem Produkt $G^{(2)}(x_1,x_3)G^{(2)}(x_2,x_4)$, während Fig. 10c und 10d verbundene Graphen darstellen, die sich nicht faktorisieren lassen. Offenbar genügt es daher, die verbundenen Greenschen Funktionen $G_c^{(\nu)}(x_1 \cdots x_\nu)$ zu kennen (der Index c steht für "connected"). Analog zu (3c-19) führt man das zugehörige erzeugende Funktional $\mathcal{Z}_c\{J\}$ ein:

$$\mathcal{Z}_c\{J\} = \sum_\nu \frac{i^\nu}{\nu!} \int d^n x_1 \cdots d^n x_\nu \, G_c^{(\nu)}(x_1 \cdots x_\nu) J(x_1) \cdots J(x_\nu), \qquad (3c\text{-}21)$$

aus welchem in zu (3c-20) analoger Weise die $G_c^{(\nu)}$ gewonnen werden können. Den Zusammenhang zwischen $\mathcal{Z}\{J\}$ und $\mathcal{Z}_c\{J\}$ stellt das "Connectedness Lemma" her:

$$\mathcal{Z}\{J\} = \exp\left(i\,\mathcal{Z}_c\{J\}\right), \qquad (3c\text{-}22)$$

das man durch Abzählen von Graphen verifizieren kann (siehe dazu den Appendix L im Friedschen Buch [116]).

Nun kann man die verbundenen Graphen noch weiter klassifizieren, indem man zwischen ein-Teilchen-reduziblen und ein-Teilchen-irreduziblen unterscheidet. So ist zum Beispiel in Fig. 10b der linke Graph reduzibel, da man ihn durch Zerschneiden einer Linie (zwischen y und z) in zwei Graphen zerlegen kann, während der rechte Graph irreduzibel ist. Ebenso ist der Graph 10c ein irreduzibler Beitrag zu $G_c^{(4)}$, der Graph 10d hingegen ein reduzibler. Es ist klar, daß alle verbundenen Graphen wie ein Geäst aus ein-Teilchen-irreduziblen Graphen aufgebaut sind, wobei die irreduziblen Teile durch Propagatoren verbunden sind. Für die 2- und 4-Punkt-Funktion ist das in Fig. 11 illustriert, worin $\Gamma^{(\nu)}$ die irreduziblen Teile bezeichnet. (Der Faktor 3 ist kombinatorischer Natur [117]).

Auch für die ein-Teilchen-irreduziblen Greenschen Funktionen $\Gamma^{(\nu)}$ wollen wir ein erzeugendes Funktional einführen:

$$\mathcal{A}\{\sigma_c\} = \sum_\nu \frac{i^\nu}{\nu!} \int d^n x_1 \cdots d^n x_\nu \, \Gamma^{(\nu)}(x_1 \cdots x_\nu) \sigma_c(x_1) \cdots \sigma_c(x_\nu). \qquad (3c\text{-}23)$$

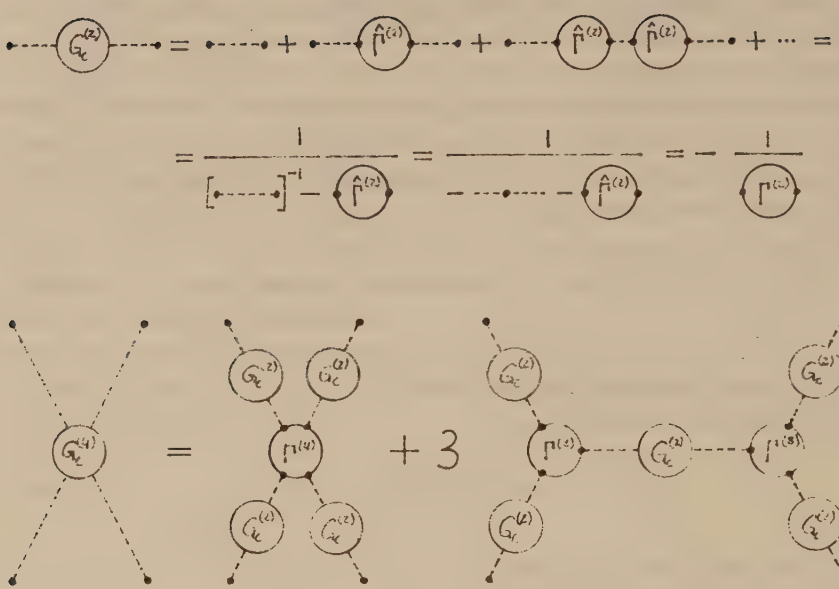


Fig. 11: Zerlegung von $G_c^{(2)}$ und $G_c^{(4)}$ in irreduzible Anteile. Dabei ist $\hat{\Gamma}^{(2)}$ gleich $\Gamma^{(2)}$ ohne den klassischen null-Loop-Beitrag.

$\mathcal{A}\{\sigma_c\}$ trägt den Namen "effektive Wirkung" und steht in engem Zusammenhang mit $V_{eff}(\sigma_c(x))$. Tatsächlich ist $\sigma_c(x)$ aus (3c-12) mit der Variablen von $\mathcal{A}$ identisch. Um das einzusehen, wollen wir zunächst den Zusammenhang zwischen $Z_c\{J\}$ und $\mathcal{A}\{\sigma_c\}$ herstellen.

Wie wir gesehen haben , sind definitionsgemäß die von $Z_c\{J\}$ generierten verbundenen Graphen wie ein Geäst aus den von $\mathcal{A}\{\sigma_c\}$ erzeugten irreduziblen Teilgraphen zusammengesetzt. Geäst-artige Graphen sind aber immer die klassische Näherung einer Feldtheorie. Also ist die Beziehung zwischen den $G_c^{(n)}$ und $\mathcal{A}$ genau dieselbe wie zwischen den $G^{(n)}$ in der schleifenlosen Näherung und dem klassischen Wirkungsintegral. Wenn wir einen Paramter η benützen, wie wir ihn in (3b-7) zur Diskussion der Loop-Entwicklung eingeführt haben, dann sehen wir, daß demnach zwischen

$\mathcal{Z}_c\{J\}$ und $\mathcal{A}\{\sigma_c\}$ die Beziehung

$$\int(\mathcal{D}\tilde{\sigma}_c)\exp\left[\frac{i}{\eta}\left(\mathcal{A}\{\tilde{\sigma}_c\}+J\tilde{\sigma}_c\right)\right] = \exp\left[i\,\mathcal{Z}_c\{J\}\right] \qquad (3c\text{-}24)$$

in niedrigster Ordnung in η bestehen muß, d.h. zur Ordnung $\frac{1}{\eta}$. Da $\frac{1}{\eta}$ für $\eta \ll 1$ sehr groß ist, ist das Integral auf der linken Seite mit der Methode der stationären Phase zu lösen. Diese ist an der Stelle $\sigma_c(x)$ durch die Bedingung

$$\left.\frac{\delta\mathcal{A}\{\tilde{\sigma}_c\}}{\delta\tilde{\sigma}_c(x)}\right|_{\tilde{\sigma}_c=\sigma_c} = -J(x) \qquad (3c\text{-}25)$$

oder

$$\frac{\delta\mathcal{A}\{\sigma_c\}}{\delta\sigma_c(x)} = -J(x)$$

festgelegt. Das impliziert

$$\mathcal{Z}_c\{J\} = \mathcal{A}\{\sigma_c\} - \sigma_c\,\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\sigma_c}\,, \qquad (3c\text{-}26)$$

was zusammen mit (3c-25) gerade eine Legendre-Transformation ist. Umgekehrt erhält man $\mathcal{A}$ aus $\mathcal{Z}_c$ gemäß

$$\mathcal{A}\{\sigma_c\} = \mathcal{Z}_c\{J\} - J\sigma_c = \mathcal{Z}_c\{J\} - \int d^n x\, J(x)\,\sigma_c(x) \qquad (3c\text{-}27)$$

mit

$$\sigma_c(x) = \frac{\delta\mathcal{Z}_c\{J\}}{\delta J(x)}\,. \qquad (3c\text{-}28)$$

Die Bezeichnung "effektive Wirkung" ist nach dieser Betrachtung plausibel, da $\mathcal{A}\{\sigma_c\}$ die Wirkung einer effektiven klassischen Feldtheorie ist, deren Graphen den Graphen der ursprünglichen quantisierten Feldtheorie genau entsprechen. Natürlich bedeutet das für die durch $\mathcal{A}\{\sigma_c\}$ definierte klassische Theorie, daß sie nichtlokal und nichtpolynomial sein muß, da die Quantenkorrekturen zu den Vertices gerade von dieser Natur sind.

Da man demnach eine vollständige Quantenfeldtheorie durch eine zugehörige effektive klassische Theorie ersetzen kann, sind natürlich Versuche unternommen worden, durch geeignete

Ansätze effektive Theorien aufzustellen, um Tatsachen der Elementarteilchenphysik zu beschreiben, obwohl die zugrundeliegende Quantenfeldtheorie unverstanden war. Die wohl erfolgreichste derartige effektive Theorie ist das nichtlineare σ-Modell [121-123], das für die Beschreibung der niederenergetischen Pion-Nukleon-Physik benutzt wurde.

Zu einer effektiven Wirkung möchte man auch eine effektive Lagrangedichte haben, d.h. man möchte

$$\mathcal{A}\{\sigma_c\} = \int d^4x\, \mathcal{L}_{eff}\{\sigma_c\} = \int d^4x \left(-V(\sigma_c(x)) + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu \sigma_c(x))^2 Z(\sigma_c(x)) + \cdots\right) \quad (3c\text{-}29)$$

schreiben, wobei V, Z usw. gewöhnliche Funktionen sind -keine Funktionale. (Die Punkte deuten höhere Terme in $(\partial_\mu \sigma_c)^2$ an.) $\mathcal{A}\{\sigma_c\}$ kann tatsächlich in der Form (3c-29) geschrieben werden, wozu man nur wissen muß, daß die $\Gamma^{(\nu)}(x_1 \cdots x_\nu)$ nur von den Differenzen der Argumente abhängen. Das ist im Anhang B ausgeführt. Von dort entnehmen wir, daß V durch

$$V(\sigma_c(x)) = \frac{i}{(2\pi)^4} \sum_{\nu}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \tilde{\Gamma}^{(\nu)}(0,\ldots,0)\, [\sigma_c(x)]^\nu \quad (3c\text{-}30)$$

gegeben ist. Darin ist $\tilde{\Gamma}(0,\ldots,0)$ gleich der Summe aller ein-Teilchen-irreduziblen Graphen mit ν äußeren σ-Linien, die alle den Impuls null tragen.

Auf analoge Weise kann man $\mathcal{Z}_c\{J\}$ in

$$\mathcal{Z}_c\{J\} = \int d^4x \left(-\mathcal{E}(J(x)) + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu J(x))^2 \mathcal{Y}(J(x)) + \cdots\right) \quad (3c\text{-}31)$$

umschreiben. Das impliziert wegen (3c-25) bis (3c-28) die Legendre-Transformation

$$V(\sigma_c(x)) = \mathcal{E}(J(x)) + J(x)\,\sigma_c(x) \quad (3c\text{-}32)$$

mit

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial J} = -\sigma_c \quad (3c\text{-}33)$$

und

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma_c} = \mathcal{J}. \qquad (3c\text{-}34)$$

Diese Transformation ist aber gerade dieselbe wie in (3c-16,17) im Zusammenhang mit dem Variationsprinzip. Um V aus (3c-29) mit dem V_{eff} des Variationsproblems zu identifizieren, braucht nur noch gezeigt zu werden, daß der Lagrangesche Multiplikator $\varepsilon_{\mathcal{J}}(x)$, den wir in (3c-11) eingeführt haben, mit $\mathcal{E}(\mathcal{J}(x))$ in (3c-31) übereinstimmt. Daß das so ist, geht aus dem Anhang zur schon genannten Arbeit von Symanzik hervor [120]. Das hier gegebene Argument stammt von Coleman [83].

Das erzeugende Funktional $\mathcal{Z}\{\mathcal{J}\}$ ist durch

$$\mathcal{Z}\{\mathcal{J}\} = \langle \mathrm{vac} | \left(\exp\left[i \int d^n x\, \mathcal{J}(x)\sigma(x) \right] \right)_+ | \mathrm{vac} \rangle \qquad (3c\text{-}35)$$

gegeben, wovon man sich durch Ausführen der Differentiation (3c-20) leicht überzeugt. In (3c-35) ist vorausgesetzt, daß $\mathcal{J}(x)$ auf ein endliches Raumzeitvolumen beschränkt ist; andernfalls ist der Erwartungswert auf der rechten Seite nicht definierbar. Definitionsgemäß ist $|\mathrm{vac}\rangle$ der Heisenberg-Zustand der niedrigsten Energiedichte. Es bedeutet keine Einschränkung, wenn wir voraussetzen, daß diese Energiedichte null ist; gegebenenfalls muß zur Hamiltondichte $\mathcal{H}$ eine additive Konstante hinzugefügt werden. Da die Energiedichte des Vakuums null ist, sind die Zustände $|\mathrm{vac}, t\rangle$, die dadurch definiert sind, daß sie zur Zeit t gleich dem Vakuum sein sollen, alle miteinander identisch. Anders ausgedrückt: Das Vakuum nimmt im Laufe der Zeit keine Phase auf. Soweit gilt das alles für das durch $\mathcal{H}$ beschriebene System. Wenn wir stattdessen ein System betrachten, dessen Dynamik durch

$$\mathcal{H}_{\mathcal{J}} = \mathcal{H} - \mathcal{J}\sigma \qquad (3c\text{-}36)$$

beherrscht ist, so sorgt der äußere Strom J für eine geänderte Zeitentwicklung. Insbesondere sind die Zustände $|vac,t\rangle$ nicht mehr alle miteinander und mit dem Vakuum $|vac\rangle$ zu $\mathcal{H}$ identisch. Nur wenn t früher ist als der Zeitpunkt des Einschaltens von $J(x)$, gilt weiterhin $|vac,t\rangle = |vac\rangle$. Wenn t allerdings später ist als der Zeitpunkt des Ausschaltens von $J(x)$, so unterscheiden sich $|vac,t\rangle$ und $|vac\rangle$ um einen Phasenfaktor; d.h.

$$|vac,t\rangle = e^{i\varphi\{J\}} |vac\rangle \quad \text{für} \quad t \to +\infty . \tag{3c-37}$$

Andererseits gibt der in (3c-36) eingeführte zusätzliche Term gerade eine zusätzliche Wirkung, die mit dem Integral in (3c-35) übereinstimmt. Daraus folgt die Relation

$$Z_J\{J\} = e^{i\varphi\{J\}} \tag{3c-38}$$

oder mit (3c-22)

$$\varphi\{J\} = W_c\{J\}. \tag{3c-39}$$

Jetzt sei angenommen, daß $J(x)$ in einem großen Raumzeitvolumen VT im wesentlichen konstant ist und außerhalb auf einem vergleichsweise kleinen Bereich sanft auf null abfällt. Das bedeutet, daß wir in (3c-31) die Terme mit Ableitungen von $J(x)$ vernachlässigen können, da sie proportional zur Oberfläche des Raumzeitvolumens VT sind und wegen des sanften Abfalls nur einen geringen Beitrag zum Integral liefern. Wir finden also

$$\varphi\{J\} \approx - VT\, \mathcal{E}(J(\bar{x})), \tag{3c-40}$$

worin $\bar{x}$ ein beliebiger Referenzpunkt innerhalb von VT ist. Noch auf andere Weise können wir $\varphi\{J\}$ bestimmen. Nach dem Abklingen aller Einschaltstörungen ist das System im Grundzustand zu $\mathcal{H}_J$, zu welchem eine Energiedichte $\mathcal{E}_J(x)$ korrespondiert. Dieses $\mathcal{E}_J(x)$ kennnen wir schon als Lagrangeschen Multiplikator in (3c-14). Nach dem Abklingen aller Ausschaltstörungen ist das System wieder im Zustand $|vac\rangle$, allerdings haben wir eine zusätz-

liche Phase, für die - wieder unter Vernachlässigung von Randeffekten -

$$\varphi\{\mathcal{J}\} \approx -\int d^4x\, \mathcal{E}_{\mathcal{J}}(x) \approx -VT\,\mathcal{E}_{\mathcal{J}}(\bar{x}) \qquad (3c\text{-}41)$$

gilt. Darin kann für $\bar{x}$ derselbe Referenzpunkt wie in (3c-40) gewählt werden. Jetzt vergleichen wir (3c-40) mit (3c-41) und finden die gewünschte Beziehung

$$\mathcal{E}(\mathcal{J}(x)) = \mathcal{E}_{\mathcal{J}}(x). \qquad (3c\text{-}42)$$

Natürlich ist diese Überlegung kein strenger Beweis von (3c-42), sondern eher eine Erläuterung dieser Beziehung; ein schlüssiger Beweis ist jedoch möglich und wurde - wie erwähnt - von Symanzik gegeben [120].

3c2) Berechnung des effektiven Potentials bei Temperatur null. Massenformeln

Wie wir schon festgestellt haben, folgt aus (3c-42) die Identität von V_{eff} und V. Insbesondere kann daher das effektive Potential mit Hilfe von (3c-30) berechnet werden. Da man allerdings die darin benötigten $\tilde{\Gamma}^{(\nu)}$ nicht exakt kennt, muß man Näherungen benutzen. Wie im vorigen Abschnitt ausgeführt, kommt dabei im Gross-Neveu-Modell nur eine $\frac{1}{N}$-Entwicklung in Frage. Ausgehend von der Lagrangedichte (3a-19) sehen wir, daß wir in niedrigster Ordnung, d.h. ohne Quantenkorrekturen,

$$\tilde{\Gamma}_0^{(2)}(p_1,p_2) = \frac{(2\pi)^n}{i} \qquad (3c\text{-}43)$$

haben, was dem Graphen in Fig. 12 entspricht. Alle übrigen $\tilde{\Gamma}^{(\nu)}$ sind in dieser Näherung identisch null, da $\mathcal{L}$ nur den quadratischen Term in σ enthält. Also finden wir in nullter Näherung

$$V_0(\sigma_c(x)) = +\frac{1}{2}(\sigma_c(x))^2, \qquad (3c\text{-}44)$$

Fig. 12: Der Beitrag $\tilde{\Gamma}_0^{(2)}$ zu $\tilde{\Gamma}^{(2)}$.

was natürlich gerade das klassische Potential ist. Von derselben Ordnung in $(\frac{1}{N})$ wie der Graph in Fig. 12 sind aber auch der ein-Loop-Graph in Fig. 6 und der ebenfalls dort gezeichnete Renormierungsgraph. Die niedrigste Ordnung in $\frac{1}{N}$ sind demnach nicht die geästartigen Graphen, sondern die ein-Loop-Graphen, d.h. schon die niedrigste Ordnung berücksichtigt Quantenkorrekturen von beliebiger Ordnung in der Kopplungskonstanten.

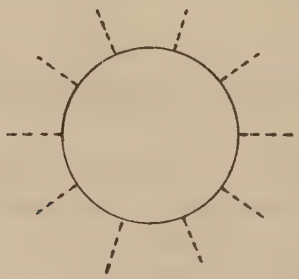


Fig. 13: Der ein-Loop-Beitrag $\tilde{\Gamma}_1^{(\nu)}$ zu $\tilde{\Gamma}^{(\nu)}$ (hier für $\nu=10$ gezeichnet).

Der ein-Loop-Beitrag $\tilde{\Gamma}_1^{(\nu)}$ zu $\tilde{\Gamma}^{(\nu)}$ besteht aus dem in Fig. 13 gezeichneten Graphen, der aufgrund seiner hohen Symmetrie $(\nu-1)!$ mal gezählt werden muß. (Hält man ein Bein fest, so können die übrigen $(\nu-1)$ Beine noch beliebig permutiert werden; das sind gerade $(\nu-1)!$ Möglichkeiten.) Mit den Feynman-Regeln (3a-24) hat man also für $\tilde{\Gamma}_1^{(\nu)}(0,\dots,0)$ den Ausdruck

$$\tilde{\Gamma}_1^{(\nu)}(0,\dots,0) = (\nu-1)!\,(-1)\,N\left[(2\pi)^n i\,\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\,\mu^{4-n/2}\right]^\nu \mathrm{Tr}\int d^n p\left[\frac{i}{(2\pi)^n}\,\frac{\not p}{p^2+i\varepsilon}\right]^\nu$$
$$= (\nu-1)!\,(-1)^{\nu+1}\,\lambda^\nu\,N^{1-\nu/2}\,(\mu^{4-n/2})^\nu \int d^n p\,\frac{\mathrm{Tr}\,(\not p)^\nu}{(p^2+i\varepsilon)^\nu}\,. \qquad (3c\text{-}45)$$

Da die Spur einer ungeraden Anzahl von Dirac-Matrizen verschwindet, ist $\tilde{\Gamma}_1^{(\nu)}$ für ungerades ν stets null. Das garantiert, daß $V_1(\sigma_c)$ eine symmetrische Funktion ist, was auch wegen der chiralen Symmetrie von $\mathcal{L}$ (3y-19) gar nicht anders sein kann. Für gerades ν ergibt das Ausführen der Spur in (3c-45)

$$\tilde{\Gamma}_1^{(2\nu)}(0,\dots,0) = (2\nu-1)!\,(-1)\,N^{1-\nu}(\mu^{2-n})^{\nu}\lambda^{2\nu}\,2^{n/2}\int\frac{d^nP}{(P^2+i\varepsilon)^{\nu}}\,. \qquad (3c\text{-}46)$$

Da das Integral in (3c-46) stark infrarotdivergent ist, müssen wir erst den gewonnenen Ausdruck in (3c-30) einsetzen und die Summe ausführen. Wir erhalten auf diese Weise

$$\begin{aligned} V_1(\sigma_c(x)) &= \tfrac{1}{2}(\sigma_c(x))^2 + \tfrac{1}{2}z_\sigma(\sigma_c(x))^2 + \frac{i}{(2\pi)^n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu)!}[\sigma_c(x)]^{2\nu}\tilde{\Gamma}_1^{(2\nu)}(0,\dots,0) \\ &= \tfrac{1}{2}(1+z_\sigma)(\sigma_c(x))^2 + \frac{N}{(2\pi i)^{n/2}i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu}}\left(\frac{\lambda^2}{N}\sigma_c^2(x)/\mu^{2-n}\right)^{\nu}\int\frac{d^nP}{(P^2+i\varepsilon)^{\nu}} \qquad (3c\text{-}47) \\ &= \tfrac{1}{2}(1+z_\sigma)\,\sigma_c^2(x) + \tfrac{1}{2}\frac{Ni}{(2\pi i)^{n/2}}\int d^nP\;\ln\left(1-\frac{\frac{\lambda^2}{N}\mu^{2-n}\sigma_c^2(x)}{P^2+i\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Das Integral (3c-47) kann nach einer Wick-Rotation integriert werden. Das ergibt (für Einzelheiten konsultiere man den Anhang C)

$$V_1(\sigma_c) = \tfrac{1}{2}\sigma_c^2\left[1+z_\sigma - \frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}}\,\frac{2}{n}\,\Gamma(1-\tfrac{n}{2})\left(\frac{\frac{N}{\lambda^2}\mu^n}{\sigma_c^2}\right)^{1-n/2}\right]. \qquad (3c\text{-}48)$$

Die Renormierungskonstante z_σ haben wir im Abschnitt 3a bestimmt, siehe (3a-33). Dieses Ergebnis setzen wir in (3c-48) ein und erhalten:

$$V_1(\sigma_c) = \tfrac{1}{2}\sigma_c^2\left[1+\frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}}\,\Gamma(1-\tfrac{n}{2})\left((n-1)\int_0^1\frac{d\alpha}{[\alpha(1-\alpha)]^{1-n/2}} - \frac{2}{n}\left(\frac{\frac{N}{\lambda^2}\mu^n}{\sigma_c^2}\right)^{1-n/2}\right)\right]. \qquad (3c\text{-}49)$$

Offenbar ist dieser Ausdruck für $n\to 2$ endlich; genauer: für $n\to 2$ erhält man (siehe Anhang D):

$$V_1(\sigma_c) = \tfrac{1}{2}\sigma_c^2\left[1+\frac{\lambda^2}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{\sigma_c^2}{\frac{N}{\lambda^2}\mu^2}\right)-1\right)\right]. \qquad (3c\text{-}50)$$

Das ist die von Gross und Neveu angegebene und oft reproduzierte Form des effektiven Potentials in ein-Loop-Näherung [49].

In dieser Näherung können wir jetzt σ_0 bestimmen, was ja unser eigentliches Ziel war. Gemäß (3c-13) müssen wir dazu das Minimum von $V_1(\sigma_c)$ bestimmen. Das liefert

$$\sigma_0^2 = \frac{N}{\lambda^2}\mu^2 \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda^2}\right), \qquad (3c\text{-}51)$$

und daher ergibt sich nach (3c-8) für die Fermionmasse

$$m = \mu \exp\left(-\frac{\pi}{\lambda^2}\right), \qquad (3c\text{-}52)$$

was erwartungsgemäß von der Form (3c-9) ist.

Nun sind λ, μ und daher auch σ_c, σ_0 keine wirklichen physikalischen Variablen, da sie alle renormierungsabhängig sind. Deshalb hängt auch $V_1(\sigma_c)$ in der Form (3c-50) nicht von physikalischen Variablen ab. Das kann jedoch geändert werden, wenn wir - der Strategie von Dittrich und Englert [124] folgend - das effektive Potential durch m und $w = \sigma_c/\sigma_0$ parametrisieren. Das führt auf

$$V_1(w) = \frac{N}{4\pi} m^2 w^2 \left(\ln w^2 - 1\right). \qquad (3c\text{-}53)$$

Zur Illustration ist $V_1(w)$ in Fig. 14 aufgezeichnet. Deutlich sieht man, daß das pertubative Vakuum ($w=0$) nicht der Grundzustand der Theorie ist.

Gl. (3c-53) zeigt, daß die zweite und alle höheren Ableitungen von $V_1(w)$ an der Stelle $w=0$ unendlich sind, so daß $V_1(w)$ um diese Stelle gar keine Taylorentwicklung besitzt, so wie es die zugrundeliegende Formel (3c-30) eigentlich verlangt. Wir konnten ja auch die $\tilde{\Gamma}_1^{(\nu)}(0,\ldots,0)$ nicht berechnen, da die Integrale in (3c-46) alle stark infrarotdivergent sind. Nur indem wir zuerst über ν summierten, konnte $V_1(w)$ berechnet werden. Das ist nicht sehr befriedigend und ist ein Hinweis darauf, daß wir die

falsche freie Theorie als Ausgangspunkt der Störungsrechnung genommen haben.

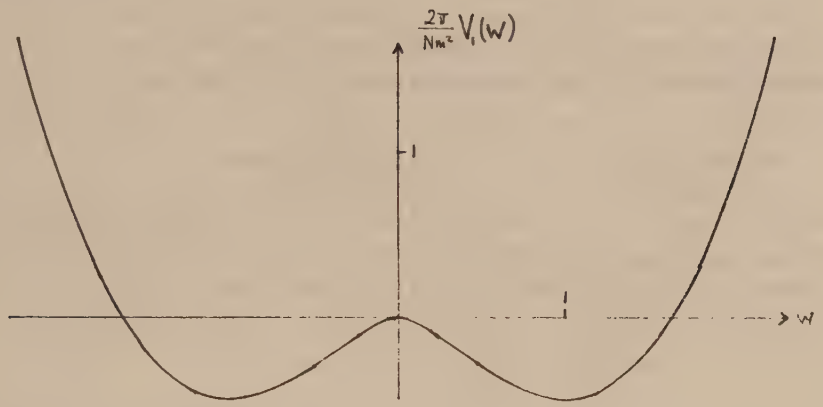


Fig. 14: Graphische Darstellung von $V_1(w)$ *aus* (3c-53).

Die Schritte, die von (3c-50) auf (3c-53) geführt haben, sind ein Beispiel für die schon angesprochene "dimensionelle Transmutation", die ja nach der Coleman-Weinbergschen Arbeit [66] eine typische Erscheinung ist bei Theorien, die aufgrund von Strahlungskorrekturen unter Symmetriebrechung leiden. In (3c-50) haben wir ein durch das dimensionslose λ parametrisiertes Ergebnis, während (3c-53) das dimensionsbehaftete m als wesentlichen Parameter enthält. Hand in Hand mit der dimensionellen Transmutation hat sich der ganze Ausdruck (etwas) vereinfacht. Auch das kann man häufig bemerken.

Natürlich hätten wir auch die Lagrangedichte aus (3c-7) nehmen können, um das effektive Potential zu berechnen. Die entsprechenden Ergebnisse gehen aus (3c-48) und (3c-53) durch die Verschiebungen $\sigma_c \to \sigma_c + \sigma_0$ bzw. $w \to w+1$ hervor. Allerdings hätten wir λ_σ anders berechnet, wenn wir die unsymmetrische Lagrangedichte (3c-7) als Ausgangspunkt der Störungsrechnung genommen hätten. Denn der Fermionpropagator zu (3c-7) ist im Impulsraum

$$\frac{i}{(2\pi)^n}\,\frac{\not p - m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\,1 \tag{3c-54}$$

und dieser Ausdruck muß dann zur Auswertung von Fig. 6 verwendet werden. Für z_σ bedeutet dies (siehe Anhang E)

$$z_\sigma = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^n}\,\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)(n-1)\int_0^1 \frac{d\alpha}{\left[\alpha(1-\alpha)+\frac{m^2}{\mu^2}\right]^{1-n/2}}\,. \tag{3c-55}$$

Wenn wir dieses z_σ in (3c-48) einsetzen, so erhalten wir an Stelle der Gross-Neveu-Massenformel (3c-52) das Abarbanelsche selbstkonsistente Ergebnis [125] (siehe Anhang E)

$$B\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) = \frac{2\pi}{\lambda^2} \tag{3c-56}$$

mit

$$B(y) = 2\sqrt{1+4y}\;\operatorname{Arcoth}\sqrt{1+4y}\,. \tag{3c-57}$$

Für kleine λ geht (3c-56) wegen (siehe Anhang F)

$$B(y) \approx -\ln y, \tag{3c-58}$$

falls $y \ll 1$, in (3c-52) über, weshalb auch (3c-56) kein störungstheoretisches Ergebnis ist.

Obwohl wir zwei recht unterschiedliche Massenformeln gewonnen haben, stellt sich heraus, daß das von renormierungsabhängigen Parametern "gereinigte" effektive Potential $V_1(w)$ unabhängig davon ist, welches z_σ in (3c-48) eingesetzt wird. Natürlich muß man beachten, daß bei der Definition von $w = \sigma_c/\sigma_0$ das zum betreffenden z_σ gehörige σ_0 Verwendung findet.

Was ist nun der physikalische Inhalt der Massenformel? Da m der physikalische Parameter der Theorie ist, bedeuten die Massenformeln, daß man die für die Rechnung erforderlichen und frei wählbaren Parameter μ und λ nicht unabhängig voneinander wählen kann. Jede Änderung von μ bedingt eine entsprechende Änderung

von λ , so daß m unverändert bleibt. Da man aber je nach Problemstellung gezwungen ist, verschiedene Werte für μ zu benützen, bedeutet dies, daß man in verschiedenen experimentellen Situationen verschieden große λ , d.h. verschieden starke Wechselwirkungen beobachtet. Betrachtet man beispielsweise elastische Streuungen mit dem invarianten Impulsübertrag $Q^2 < 0$, so treten in der Störungsreihe typischer Weise Potenzen von $\ln\left(\frac{-Q^2}{\mu^2}\right)$ auf. Um eine gute Konvergenz der Störungsrechnung zu erzielen, muß man daher $\mu^2 \approx -Q^2$ wählen. Aufgrund der Massenformeln bedeutet dies jedoch, daß man eine von $(-Q^2)$ abhängige Kopplungskonstante ("running coupling constant") erhält. Da aber große Impulsüberträge $(-Q^2)$ auftreten, wenn sich die streuenden Teilchen sehr nahe kommen, und kleine $(-Q^2)$, wenn sie in großen Abständen aneinander vorbeifliegen, kann man auch von einer abstandsabhängigen Kopplungskonstanten sprechen.

In diesem Sinne machen die beiden Massenformeln (3c-52) und (3c-56) unterschiedliche Aussagen. Für kleine Abstände, d.h. für $\mu^2 \to \infty$ sagen beide Formeln $\lambda^2 \to 0$. Das bedeutet, daß die Gross-Neveu-Fermionen bei kleinen Abständen praktisch keine Wechselwirkung aufeinander ausüben. Man spricht deshalb von "asymptotischer Freiheit". Experimentell ist eine solche Situation bekanntlich bei den Quarks beobachtet worden, die innerhalb der Hadronen nur eine schwache Wechselwirkung zeigen und sich quasifrei bewegen.

Für große Abstände, d.h. für $\mu^2 \to 0$ implizieren die beiden Massenformeln hingegen ein unterschiedliches Verhalten der Kopplungskonstanten. Zunächst bemerken wir, daß wir die Formel (3c-52) für $\mu^2 < m^2$ gar nicht benutzen können, da sie $\lambda^2 < 0$ verlangen würde. Für $\mu^2 = m^2$ haben wir aber $\lambda^2 = \infty$, d.h. schon bei Abständen der Größenordnung der Comptonwellenlänge $\frac{1}{m}$ wird die Wechselwirkung zwischen den Gross-Neveu-Teilchen beliebig stark, was natürlich ein strenges Bag-artiges "confinement" zur Folge hat, eine Eigenschaft der Teilchen, die man für die QCD so gerne beweisen möchte. Ganz anders ist die Situation bei der selbstkonsistenten Massenformel (3c-56). Dem Anhang F entnehmen

wir

$$\lim_{y\to\infty} B(y) = 2 \,, \tag{3c-59}$$

so daß wir auf $\lambda^2 = \pi$ für $\mu^2 \to 0$ schließen. In diesem Fall haben wir also für große Abstände eine praktisch konstante Kopplungskonstante, genau wie in der QED. Um es konkret zu sagen: Wir erwarten, daß Strahlungs-Korrekturen aus der punktförmigen Wechselwirkung, wie sie durch das masselose σ-Feld vermittelt wird, eine Yukawa-artige Wechselwirkung machen, wobei das effektive Austauschteilchen eine sehr große Masse M hat, die zwar vom übertragenden Impuls abhängt, aber für klein Impulsüberträge konstant ist. Die Wechselwirkungsenergie ist daher für große Abstände r ungefähr proportional zu

$$U(r) = \frac{M}{2}\, e^{-Mr} \,, \tag{3c-60}$$

was das Yukawa-Potential in einer Raumdimension ist. Natürlich haben gebundene Zustände in einem solchen Potential eine sehr große, aber doch endliche Bindungsenergie, so daß kein "confinement" vorliegt.

Wie wir also gesehen haben, ist es keineswegs belanglos für die Interpretation der Theorie, welche Massenformel die richtige ist. Andererseits haben wir aber auch festgestellt, daß das effektive Potential nach Elimination aller renormierungsabhängigen Größen stets die Form (3c-53) annimmt, so daß sich hier die Details der Renormierung als unerheblich erweisen. Die Verwirrung wird vollständig, wenn man sich vor Augen führt, daß man außer den beiden gegebenen noch viele andere Definitionen von z_σ verwenden kann, wobei man jeweils eine neue Massenformel, aber immer dasselbe $V_1(w)$ erhält. Mögliche weitere z_σ erhält man beispielsweise, indem man in (3a-25) statt $k^2 = \mu^2$ die Forderung $k^2 = -M^2$ stellt und so einen weiteren beliebigen Parameter M einführt. (Das ist im wesentlichen der Inhalt der von Muta vorgeschlagenen Renormierungsvorschrift [127]). Es scheint daher,

daß man bei der Renormierung eine große Willkür hat. Tatsächlich haben sich Flenning, Furuay und de Lyra [128] überlegt, daß es für physikalische Größen, z.B. $V_1(w)$, keine Rolle spielt, welche Renormierungsvorschrift gewählt wird. Das ist aber nur die halbe Wahrheit, denn es gibt meherere gewichtige Gründe, die dafür sprechen, daß man richtigerweise die selbstkonsistente Abarbanelsche Methode verwenden sollte.

Der erste Grund ist der der Selbstkonsistenz. Bei der Berechnung von typisch nichtpertubativen Effekten sollte man keine Renormierungskonstanten benutzen, die für die symmetrische Theorie berechnet sind. Mit Blick auf Fig. 14 bedeutet das: wer sich für das Minimum bei $w=\pm 1$ interessiert, darf nicht z_σ bei $w=0$ bestimmen. Dieses Argument wird von der Tatsache unterstützt, daß (3c-52) mit (3c-56) für $\lambda^2 \ll 1$ übereinstimmt; d.h. (3c-52) ist gut für kleine λ^2, also in dem Bereich, wo man noch am ehesten auf die Störungsrechnung vertrauen kann. Da aber auch (3c-52) ganz offensichtlich kein pertubatives Ergebnis ist, fehlt dieser Massenformel die nötige Selbstkonsistenz.

Ein zweiter Grund besteht darin, daß in der betrachteten Näherung das (statische) Fermion-Fermion-Potential bei großen Abständen tatsächlich von der Form (3c-60)ist, was laut unserer vorausgehenden Betrachtung mit der Gross-Neveuschen Massenformel (3c-52) nicht verträglich ist. Um die genannte Form der Wechselwirkungsenergie einzusehen, muß man wissen, daß der volle, renormierte σ-Propagator in niedrigster $\frac{1}{N}$-Ordnung durch

$$G^{(2)}(k) = \frac{1}{2\pi i \lambda^2 \mathcal{B}(-\frac{m^2}{k^2})} \qquad (3c\text{-}61)$$

gegeben ist. (Dieses Ergebnis wird weiter unten abgeleitet, siehe Gl. (3c-98,101)). Für die Fermion-Fermion-Wechselwirkung muß das noch zweimal mit dem Vertexfaktor $(2\pi)^2 i \lambda/\sqrt{N}$ mulitipliziert werden. Dann erhält man gerade die Bornsche Näherung für die Streuung, wie sie in Fig. 3c dargestellt ist, wenn wir der Verbindung zwischen den Vertices den Faktor (3c-61) zuordnen. Die Bornsche Näherung ist aber gerade gleich der Fouriertrans-

formierten des statischen Potentials, sofern der übertragene Impuls raumartig ist. Wir erhalten demnach das statische Potential, indem wir in (3c-61) mit den Vertexfaktoren multiplizieren, dann $k=(0,\vec{q})$ einsetzen und die Fouriertransformation in $\vec{q}$ machen. Das ergibt (ein Faktor i der Feynman-Diagramme muß berücksichtigt werden)

$$U(r) = -\frac{8\pi^2}{N}\int_0^\infty \frac{\cos(qr)}{B(m^2/q^2)}\,dq\,. \qquad (3c\text{-}62)$$

Da wir uns hier für große r interessieren, brauchen wir $B(m^2/q^2)$ nur für kleine q, d.h. für große Argumente. Somit (siehe Anhang F)

$$U(r) \approx -\frac{4\pi^2}{N}\int_0^\infty \frac{\cos(qr)}{1+q^2/(12m^2)}\,dq = -\frac{2\pi^3}{N}\,M e^{-Mr}\,, \qquad (3c\text{-}63)$$

worin $M^2=12m^2$. In der Tat ist $U(r)$ für große Abstände von der Form (3c-60). Auch hier kann man die dimensionelle Transmutation beobachten, da das Potential (3c-62) nicht mehr die Kopplungskonstante λ, sondern die Fermionmasse m als Parameter der Potentialstärke und -reichweite hat.

Als letzten Einwand gegen die Verwendung von Renormierungskonstanten der symmetrischen Theorie wollen wir ein Ergebnis des nächsten Abschnittes anführen. Dort wird die zwei-Loop-Näherung betrachtet, und es stellt sich heraus, daß man sehr viel besser zurecht kommt, wenn man ein selbstkonsistentes z_σ benützt. Das symmetrische z_σ führt bei zwei-Loop-Rechnungen zu gewissen Schwierigkeiten im Detail. Einzelheiten sind im Abschnitt 3d zu finden.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß man vernünftigerweise selbstkonsistente Renormierungsvorschriften à la Abarbanel [125] verwendet. Daraus folgt, daß der richtige Zusammenhang zwischen μ, λ und m in (3c-56) gegeben ist, während das ursprüngliche Ergebnis von Gross und Neveu, das in (3c-52) aufgeschrieben ist, nur für kleine λ^2 gültig ist, da es teilweise aus der Störungsrechnung stammt.

3c3) Die Tadpole-Gleichung

Hier stellt sich die Frage, ob wir nicht die gesamte Rechnung manifest selbstkonsistent machen können, indem wir überhaupt keinen Gebrauch von der symmetrischen Lagrangedichte (3a-19) machen, sondern stets $\mathcal{L}_{sc}$ aus (3c-7) benutzen. (Jetzt ist klar, weswegen diese Lagrangedichte mit "sc" = "selfconsistent" indiziert wurde.) Das ist natürlich möglich und unter manchen Gesichtspunkten sogar sehr vorteilhaft. Da wir nämlich in erster Linie an m als Funktion von μ und λ interessiert sind, brauchen wir gar nicht das effektive Potential für beliebige σ_c zu kennen, denn wir wollen doch nur wissen, wo das Minimum des Potentials liegt. Diese Frage läßt sich mit $\mathcal{L}_{sc}$ sehr einfach formulieren, wie von Iliopoulos und Papanicolaou gezeigt wurde [129]. Deren Strategie soll nun für das Gross-Neveu-Modell dargestellt werden (siehe dazu auch [79]).

Wenn wir gemäß (3c-5) ein neues σ-Feld eingeführt haben, wobei allerdings der Wert von σ_0 noch unbekannt ist, so gilt definitionsgemäß Gl. (3c-6):

$$\langle vac \mid \sigma(x) \mid vac \rangle = 0 .$$

Für das effektive Potential bedeutet dies, daß $V(\sigma_c)$ sein Minimum bei $\sigma_c = 0$ hat. Wegen (3c-30) folgt daraus

$$\tilde{\Gamma}^{(1)}(0) = 0 . \qquad (3c\text{-}64)$$

In Worten: Die Summe aller ein-Teilchen-irreduziblen Feynman-Graphen mit einem σ-Bein, das keinen Impuls trägt, ist null. Graphisch ist das in Fig. 15 dargestellt. Aufgrund ihres Aussehens werden diese Graphen unter Verwendung des englischen Wortes für "Kaulquappe" als "Tadpole-Graphen" bezeichnet, und Gl. (3c-64) heißt "Tadpole-Gleichung". Zu ihrer Auswertung ist natürlich die Lagrangedichte $\mathcal{L}_{sc}$ zugrunde zu legen. In Analogie zu (3a-24) sind die zu $\mathcal{L}_{sc}$ gehörigen Feynman-Regeln durch die graphischen Elemente in Fig. 16. und die Impulsraum-Faktoren

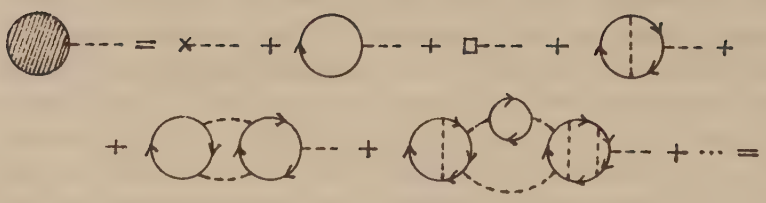


Fig. 15: Die Tadpole-Gleichung.

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad \frac{i}{(2\pi)^n}\,\frac{\not p - m}{p^2-m^2+i\varepsilon}\,, && \text{(e)}\quad (2\pi)^n i\,(z_4\not p + z_\lambda m)\,,\\
&\text{(b)}\quad \frac{1}{(2\pi)^n i}\,, && \text{(f)}\quad \frac{(2\pi)^n}{i}\,z_\sigma\,,\\
&\text{(c)}\quad \frac{(2\pi)^n}{i}\,\sigma_0\,, && \text{(g)}\quad \frac{(2\pi)^n}{i}\,z_\sigma\sigma_0\,,\\
&\text{(d)}\quad (2\pi)^n i\,\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\,\mu^{1-n/2}\,, && \text{(h)}\quad (2\pi)^n i\,z_\lambda\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\,\mu^{1-n/2}
\end{aligned}
\qquad \text{(3c-65)}
$$

gegeben. Die Reihenfolge entspricht den Summanden in (3c-7).

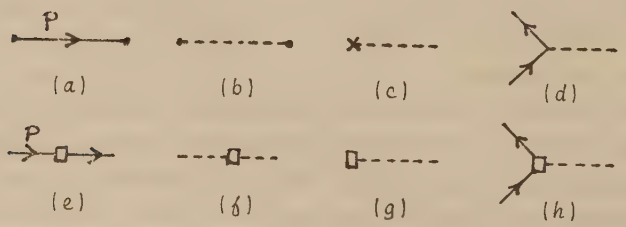


Fig. 16: Elemente der Feynman-Graphen zu $\mathcal{L}_{sc}$ *aus (3c-7).*

Fig. 17: Die Tadpole-Gleichung in (a) klassischer und (b) niedrigster $\frac{1}{N}$-Näherung.

In klassischer Näherung ist die Tadpole-Gleichung in Fig. 17a gezeichnet. Offenbar folgt daraus

$$\sigma_0 = 0 \ ,$$

wie es nicht anders zu erwarten war. In niedrigster Ordnung der $\frac{1}{N}$-Entwicklung haben wir jedoch Fig. 17b , so daß wir die Gleichung

$$\frac{(2\pi)^n}{i}\sigma_0 + (2\pi)^n i\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\mu^{1-n/2}(-1)N\,\mathrm{Tr}\int d^nP\,\frac{i}{(2\pi)^n}\,\frac{\not p - m}{p^2-m^2+i\varepsilon} + \frac{(2\pi)^n}{i}z_\sigma\sigma_0 = 0 \ ,$$

oder nach Kürzen und Ausführen der Spur,

$$(1+z_\sigma)\sigma_0 - \lambda\sqrt{N}\,\mu^{1-n/2}\,m\,\frac{1}{(2\pi^2)^{n/2}}\int d^n\tilde p\,\frac{1}{\tilde p^2+m^2} \qquad \text{(3c-66)}$$

erhalten. Gl. (3c-66) hat natürlich die symmetrische Lösung $\sigma_0 = m = 0$, aber daneben noch ($\sigma_0 = m\frac{\sqrt{N}}{\lambda}\mu^{n/2-1}$)

$$1 + z_\sigma = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}}\,\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-n/2} \ , \qquad \text{(3c-67)}$$

wozu das Integral (3c-66) mittels (3a-31,32) ausgewertet wurde.

Je nachdem welches z_σ in (3c-67) Verwendung findet, können wir die Massenformeln (3c-52,56) reproduzieren. Denn Einsetzen von

$$z_\sigma = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)(n-1) \int_0^1 \frac{d\alpha}{\left[\alpha(1-\alpha) + \frac{M^2}{\mu^2}\right]^{1-n/2}} \,, \qquad (3c\text{-}68)$$

was für $M=0$ bzw. $M=m$ das symmetrische und das selbstkonsistente z_σ ergibt, impliziert für $n \to 2$ die Gleichung

$$\frac{2\pi}{\lambda^2} = \ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right) + B\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right). \qquad (3c\text{-}69)$$

Für $M=m$ ist das offensichtlich Abarbanels Massenformel, während für $m=0$ unter Berücksichtigung von (3c-58) das Ergebnis von Gross und Neveu folgt.

Soweit wissen wir, daß die Tadpole-Gleichung für $m=0$ und für das durch (3c-67) festgelegte m erfüllt ist. Um sicher zu sein, daß das effektive Potential bei $\sigma_c = 0$ nicht nur ein Extremum, sondern ein Minimum besitzt, müssen wir uns davon überzeugen, daß $V(\sigma_c)$ für kleine σ_c von der Form

$$V(\sigma_c) \approx k\,\sigma_c^2$$

mit $k>0$ ist. Wegen (3c-30) ist das gleichbedeutend mit der Forderung

$$\frac{i}{(2\pi)^n} \tilde{\Gamma}^{(2)}(0,0) > 0. \qquad (3c\text{-}70)$$

Die Beiträge zu $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ in ein-Loop-Näherung sind in Fig. 18 dargestellt.

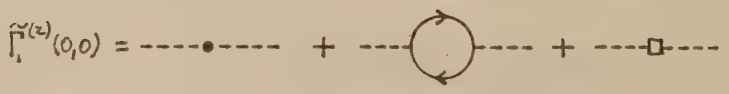


Fig. 18: $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ in ein-Loop-Näherung.

Die Übersetzung mittels der Feynman-Regeln liefert:

$$\frac{i}{(2\pi)^n}\,\tilde{\Gamma}_1^{(2)}(0,0) = 1 + z_\sigma - \frac{\lambda^2}{(2\pi^2)^{n/2}}\,\mu^{2-n}\int d^n\tilde{p}\;\frac{\tilde{p}^2-m^2}{(\tilde{p}^2+m^2)^2}\,, \qquad (3c\text{-}71)$$

worin schon die Wick-Rotation ausgeführt ist. Die Integration ist einfach und ergibt

$$\frac{i}{(2\pi)^n}\,\tilde{\Gamma}_1^{(2)}(0,0) = 1 + z_\sigma - \frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}}\,\Gamma\left(1-\tfrac{n}{2}\right)(n-1)\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-n/2}. \qquad (3c\text{-}72)$$

Im Fall $m \neq 0$ können wir (3c-67) darin einsetzen, so daß wir

$$\frac{i}{(2\pi)^n}\,\tilde{\Gamma}_1^{(2)}(0,0) = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^n}\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-n/2}\Gamma\left(1-\tfrac{n}{2}\right)(2-n) \xrightarrow{n\to 2} \frac{\lambda^2}{\pi} > 0 \qquad (3c\text{-}73)$$

finden. Somit handelt es sich bei dem durch (3c-67) bestimmten m tatsächlich um die dynamisch erzeugte Fermionmasse, während $m=0$ von einem relativen Maximum des effektiven Potentials herrühren muß.

Natürlich kann man auch ausgehend von $\mathcal{L}_{sc}$ das effektive Potential berechnen. In gewisser Weise ist das sogar leichter als mit $\mathcal{L}$, da die Diagramme zu $\tilde{\Gamma}^{(\nu)}(0,\ldots,0)$ jetzt wegen der endlichen Fermionmasse nicht mehr infrarotdivergent sind. Daher können sie sofort für $n=2$ berechnet werden. Wie im Anhang G gezeigt ist, erhält man V_1 aus (3c-53) mit $w \to 1+w$, was das zu erwartende Ergebnis ist.

Wie wir gesehen haben, kann man mit der Tadpole-Gleichung die Massenformeln sehr viel schneller und einfacher bekommen als durch die Berechnung des effektiven Potentials. Das liegt daran, daß man nur sehr wenige Diagramme auswerten muß. Darüberhinaus bietet die Tadpole-Gleichung noch einen anderen großen Vorteil. Wenn man nämlich höhere Näherungen berechnen will, so muß man für das effektive Potential Graphen der in Fig. 9b dargestellten Art berücksichtigen, wobei klar ist, daß die Kombinatorik sehr kompliziert werden kann; jedenfalls genügt es nicht mehr, wie bei den ein-Loop-Rechnungen einen Faktor $(\nu-1)!$

zu berücksichtigen. Da wir bei den Tadpole-Graphen immer nur ein äußeres σ-Bein haben, braucht uns die Kombinatorik nicht zu kümmern: jeder in Fig. 15 gezeichnete Graph kommt genau einmal vor. Daher eignet sich die Tadpole-Gleichung besonders gut für die Berechnung höherer Näherungen. Außerdem wird dabei stets $\mathcal{L}_{\alpha}$ benutzt, so daß die ganze Rechnung manifest selbstkonsistent gemacht werden kann.

Um ein häufiges Mißverständnis auszuräumen, sei noch das Folgende angemerkt. Die Tadpole-Gleichung bedeutet nur das in (3c-64) ausgedrückte Verschwinden von $\tilde{\Gamma}^{(1)}(0)$. Deshalb hat das effektive Potential bei $\sigma_c = 0$ ein Minimum, was

$$\langle vac | \sigma(x) | vac \rangle = 0$$

impliziert. Wegen der in (3c-18) gegebenen Definition ist das gleichbedeutend mit

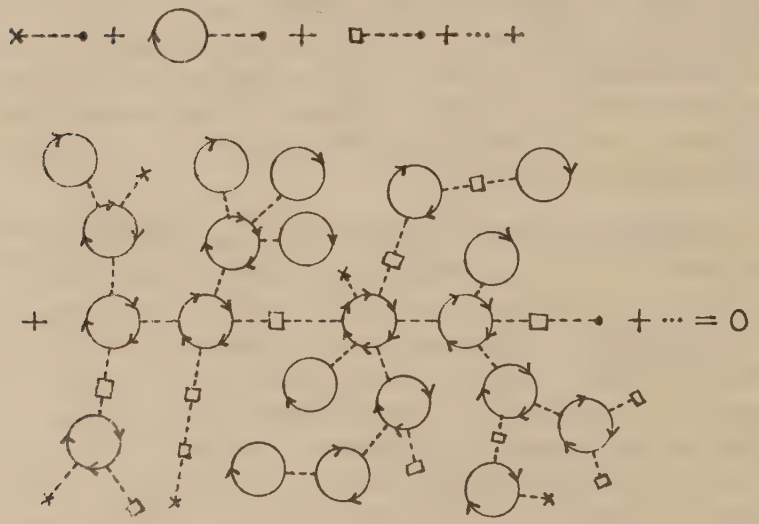


Fig. 19: Beiträge zu $G^{(1)}(x)$ in niedrigster $\frac{1}{N}$-Näherung. Der dicke Punkt repräsentiert die Koordinate x.

$$G^{(1)}(x) = 0 . \qquad (3c\text{-}74)$$

In niedrigster $\frac{1}{N}$-Näherung tragen zu (3c-74) die in Fig. 19 gezeichneten Graphen bei. Neben den Tadpole-Graphen aus Fig. 17b gehören dazu noch alle Graphen, die man erhält, indem man in σ-Propagatoren Fermionen-Loops oder Z_σ-Renormierungsterme einfügt und an die Loops in beliebiger Weise die Elemente der Tadpole-Gleichung, Fig. 17b, anhängt. Offenbar bedeutet das, daß man jeweils für zwei zusätzliche Vertices einen zusätzlichen Loop hat, so daß die Ordnung in $\frac{1}{N}$ nicht verändert wird.

Beim Rechnen mit $\mathcal{L}$ haben wir G_0 als Erwartungswert von $\sigma(x)$ bestimmt, d.h. wir haben im Prinzip Fig. 19 ausgewertet - allerdings auf dem Umweg über das effektive Potential. Um Fig. 19 direkt verwenden zu können, müßte man einen symmetriebrechenden Term $J(x)\sigma(x)$ zu $\mathcal{L}$ addieren und dann fragen, unter welchen Umständen am Ende der Rechnung $J(x)$ gleich null gesetzt werden kann, ohne daß auch G_0 verschwindet. Dieses Vorgehen entspräche der Strategie von [129] bzw. [79].

Die Wahl zwischen Fig. 17b und Fig. 19 fällt leicht; denn die erstere ist ganz offensichtlich vernünftigerweise vorzuziehen.

3c4) Effektives Potential und Tadpole-Gleichung bei endlicher Temperatur

Soweit haben wir uns im Rahmen der null-Temperatur-Quantenfeldtheorie bewegt. Jetzt stellen wir die Frage, inwiefern sich etwas ändert, wenn sich das quantisierte Feld in einem Temperaturbad befindet. Wie in der statistischen Quantenmechanik [130-132] wollen wir darunter verstehen, daß wir statt der Vakuumserwartungswerte in (3c-18) entsprechende Mittelwerte über das kanonische Ensemble benutzen. Die Greenschen Funktionen sind also bei der Temperatur $T = 1/\beta$ durch

$$G_\beta^{(\nu)}(x_1 \dots x_\nu) = \frac{Tr\left(e^{-\beta H}\,(\sigma(x_1)\cdots\sigma(x_\nu))_+\right)}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)} \qquad (3c\text{-}75)$$

definiert. Wir folgen hier den Arbeiten von Brown und Maclay [133], Bernard [134], Dolan und Jackiw [28] sowie Weinberg [29]. In (3c-75) ist H der Hamiltonoperator der Theorie, der auch die zeitliche Entwicklung beherrscht. Wie im Anhang H ausgeführt, hat das zur Folge, daß im Impulsraum die Feynman-Regeln auf die folgende einfache Weise zu modifizieren sind, um die Graphen bei endlicher Temperatur auszuwerten.

Die Temperatur wird inkorporiert, indem man Integrale über innere Fermionimpulse gemäß

$$\int_\beta d^n p\, f(p^0, \vec{p}) = \int_\beta dp^0\, d^{n-1}\vec{p}\, f(p^0, \vec{p}) = \\ = i \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int d\tilde{p}_0\, d^{n-1}\vec{p}\, e^{i\nu(\beta\tilde{p}_0 - \pi)} f(i\tilde{p}_0, \vec{p}) \qquad (3c\text{-}76)$$

auswertet; andere Änderungen der Feynman-Regeln sind nicht erforderlich. Wie die Tilde andeutet, ist in (3c-76) die Wickrotation bereits durchgeführt. Ohne weiteres erkennen wir, daß der Term mit $\nu=0$ das null-Temperatur-Integral darstellt, denn für $\beta\to\infty$ liefern die anderen Terme ja offensichtlich keinen Beitrag. Hätten wir noch über Boson-Impulse zu integrieren, so käme (3c-76) ohne π im Exponenten zur Anwendung. Für unsere Zwecke brauchen wir jedoch nur (3c-76) für Fermion-Impulse.

Durch (3c-75) bzw. (3c-76) ist in gewisser Weise das relativistische Transformationsverhalten der Temperatur festgelegt, sofern man von den Greenschen Funktionen bei endlicher Temperatur dasselbe Transformationsverhalten wie bei Temperatur null erwartet. Gl. (3c-76) suggeriert, daß sich β wie die zeitartige Komponente eines Lorentzvektors transformiert. Aber was sind dann die zu β gehörigen raumartigen Komponenten? Leider gibt auch die Thermodynamik bis heute keine Auskunft über die Tempe-

ratur eines bewegten Systems. Tatsächlich finden sich in der Literatur verschiedene Ansätze einer relativistischen Thermodynamik, und je nach Ansatz erscheint ein bewegter Körper mal wärmer, mal kühler oder auch mit derselben Temperatur wie in Ruhe. Eine nützliche Lektüre ist dazu eine neuere Arbeit von Goodinson und Luffman [135], die unterschiedliche Verallgemeinerungen der nichtrelativistischen Thermodynamik diskutieren.

Da diese Fragen ihrer Klärung noch harren, müssen wir in Kauf nehmen, daß die von uns eingeführte Temperatur möglicherweise nicht mit der thermodynamischen Temperatur übereinstimmt, so daß unsere Ergebnisse nur in ausgezeichneten Bezugssystemen richtig sind. Da wir aber nur von der Translationsinvarianz expliziten Gebrauch gemacht haben (etwa im Zusammenhang mit Gl. (3c-4) und im Anhang B), ist für unsere Betrachtungen Lorentzinvarianz bei endlicher Temperatur nicht erforderlich, so daß wir bei der Anwendung von (3c-76) keine Bedenken haben müssen.

Zuerst wollen wir das effektive Potential zu $\mathscr{L}$ bei endlicher Temperatur berechnen. Dazu müssen wir das Integral in (3c-47) auswerten, indem wir die Vorschrift (3c-76) benützen. Also finden wir für das effektive Potential bei endlicher Temperatur in ein-Loop-Näherung den Ausdruck

$$V_1^\beta(\sigma_c) = \tfrac{1}{2}(1+z_\sigma)\sigma_c^2 - \frac{1}{2}\frac{N}{(2\pi^2)^{n/2}}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\int d\tilde{p}_0\, d\vec{p}^{\,n-1}\, e^{i\nu(\beta\tilde{p}_0-\pi)}\ln\left(1+\frac{\frac{\lambda^2}{N}\mu^{2-n}\sigma_c^2}{\tilde{p}_0^2+\vec{p}^{\,2}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\sigma_c^2\left[1+z_\sigma - \frac{\lambda^2}{(4\pi)^{n/2}}\frac{2}{n}\Gamma(1-\tfrac{n}{2})\left(\frac{\frac{N}{\lambda^2}\mu^{4}}{\sigma_c^2}\right)^{1-n/2}\right] + \qquad \text{(3c-77)}$$

$$+\frac{2N}{(2\pi^2)^{n/2}}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\int_0^\infty d\tilde{p}_0\int d\vec{p}^{\,n-1}\cos(\nu\beta\tilde{p}_0)\ln\left(1+\frac{\frac{\lambda^2}{N}\mu^{2-n}\sigma_c^2}{\tilde{p}_0^2+\vec{p}^{\,2}}\right).$$

Hierbei ist davon Gebrauch gemacht, daß der Summand mit $\nu=0$ das schon bekannte null-Temperatur-Ergebnis aus (3c-48) ist, sowie davon, daß der Integrand symmetrisch in $\tilde{p}_0$ und ν gemacht werden kann. Zur Vereinfachung wollen wir gleich wieder den Parameter $w = \frac{\sigma_c}{\sigma_0} = \frac{\lambda}{\sqrt{N}}\mu^{1-n/2}\,\sigma_c/m_0$ einführen, wobei m_0 die Fermion-

Masse bei Temperatur null meint, die wir bisher einfach mit m bezeichnet haben. Wegen (3c-53) schreiben wir damit

$$V_1^\beta(w) = \frac{N}{4\pi} m_0^2 w^2 \left(\ln w^2 - 1\right) + \\ + \frac{2N}{(2\pi^2)^{n/2}} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \int_0^\infty d\tilde{p}_n \int d^{n-1}\tilde{p}_0 \cos(\nu\beta\tilde{p}_0) \ln\left(1 + \frac{m_0^2 w^2}{\tilde{p}_0^2 + \tilde{p}^2}\right)\Bigg|_{n\to 2}, \tag{3c-78}$$

wobei wir angedeutet haben, daß im zweiten Term noch der Grenzübergang $n \to 2$ vollzogen werden muß. Da keine Renormierungsterme mehr vorhanden sind, können wir jetzt schon vermuten, daß der Beitrag endlicher Temperatur konvergent ist, was auch von der Rechnung bestätigt wird. Wir könnten also sofort in (3c-78) $n = 2$ setzen. Vorsichtshalber wollen wir aber den Ausdruck für beliebiges $n \neq 2$ auswerten. Da diese Rechnung technisch etwas aufwendig ist, befindet sie sich im Anhang I. Von dort zitieren wir das Ergebnis:

$$V_1^\beta(w) = \frac{N}{4\pi} m_0^2 w^2 \left(\ln w^2 - 1\right) - \frac{2N}{\pi^{n/2}} \beta^{-n} \left(\mathcal{K}_{\frac{n}{2}}(\beta m_0 |w|) - \mathcal{K}_{\frac{n}{2}}(0)\right)\Big|_{n\to 2}. \tag{3c-79}$$

Darin ist $\mathcal{K}_\gamma(x)$ die durch

$$\mathcal{K}_\gamma(x) \equiv \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \left(\frac{x}{\nu}\right)^\gamma K_\gamma(\nu x) \tag{3c-80}$$

definierte Summe über die modifizierten Besselfunktionen. Diese $\mathcal{K}_\gamma$ treten im folgenden stets auf, wenn Feynman-Graphen bei endlicher Temperatur auszuwerten sind. Die wichtigsten Eigenschaften der Funktionen $\mathcal{K}_\gamma(x)$ sind im Anhang K aufgelistet.

Offenbar kann der Grenzübergang $n \to 2$ in (3c-79) tatsächlich problemlos durchgeführt werden, so daß wir $\left(\mathcal{K}_1(0) = \pi^2/12\right)$

$$V_1^\beta(w) = \frac{N}{2\pi} m_0^2 \left[\frac{1}{2} w^2 \left(\ln w^2 - 1\right) - \frac{4}{(\beta m_0)^2} \mathcal{K}_1(\beta m_0 |w|) + \frac{\pi^2}{3(\beta m_0)^2}\right] \tag{3c-81}$$

erhalten. Dieses effektive Potential bei endlicher Temperatur in ein-Loop-Näherung wurde verschiedentlich berechnet [32,33,138], doch in der hier gegebenen explizit renormierten Form und in

Abhängigkeit von den physikalischen Parametern m_0, w, β stammt es von Dittrich und Englert [124].

Für $\beta < \infty$ liegt das Minimum von $V_1^\beta(w)$ nicht mehr bei $w=1$, sondern bei einem kleineren Wert. Das bedeutet, daß der Erwartungswert von $\sigma(x)$ nicht mehr mit τ_0 übereinstimmt, so daß wir bei endlicher Temperatur eine andere (effektive) Fermionmasse $m \neq m_0$ haben. Wenn wir uns an die Definition von w erinnern, ist es klar, daß m durch

$$\frac{d}{dw} V_1^\beta(w)\Big|_{w = m/m_0} = 0 \qquad (3c\text{-}82)$$

zu bestimmen ist. Wegen der Identität

$$\frac{d}{dx} K_\gamma(x) = -x K_{\gamma-1}(x)$$

(siehe Anhang K) ist (3c-82) gleichbedeutend mit

$$\frac{m}{m_0}\left[\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)^2 + 4 K_0(\beta m)\right] = 0. \qquad (3c\text{-}83)$$

Diese Gleichung hat die beiden Lösungen

$$\frac{m}{m_0} = \begin{cases} 0 \\ h(\beta m_0) \end{cases}, \qquad (3c\text{-}84)$$

wobei $h(z)$ definiert ist durch

$$\ln(h(z)) + 2 K_0(z\, h(z)) = 0. \qquad (3c\text{-}85)$$

Für $\beta \to \infty$, d.h. $T \to 0$, muß $m \to m_0$ gelten, und daher kommt für kleine Temperaturen nur die zweite Lösung in (3c-84) in Betracht. Also schreiben wir

$$\frac{m}{m_0} = \begin{cases} h(\beta m_0) & \text{für } \beta > \beta_c \\ 0 & \text{für } \beta \le \beta_c \end{cases}, \qquad (3c\text{-}86)$$

worin $1/\beta_c = T_c$ die durch

$$h(\beta_c m_0) = 0 \tag{3c-87}$$

definierte kritische Temperatur ist. Da für $x \ll 1$

$$K_0(x) = -\frac{1}{4} \ln\left(\frac{x}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{2}\gamma + O(x^2) \tag{3c-88}$$

(siehe Anhang K) gilt, folgt daraus

$$\frac{m_0}{T_c} = \beta_c m_0 = \pi e^{-\gamma} = 1.7639\ldots \tag{3c-89}$$

Wie erwartet ist die kritsiche Temperatur von der Größenordnung der Ruhemasse bei Temperatur null. In Zahlen ausgedrückt sagt (3c-89), daß zu $m_0 = 1\,MeV$ die kritische Temperatur $T_c = 6.3 \times 10^9 K$ korrespondiert.

Zur Illustration sind $V_1^\beta(w)$ als Funktion von w für einige Werte von T/T_c in Fig. 20 und m/m_0 als Funktion von T/T_c in Fig. 21 gezeichnet.

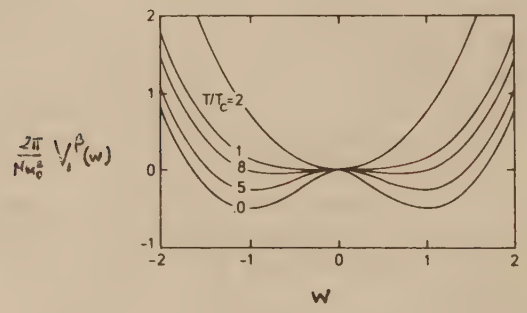


Fig. 20: $(2\pi/Nw_0^2)V_1^\beta(w)$ als Funktion von w für $T/T_c = 0, 0.5, 0.8, 1, 2$.

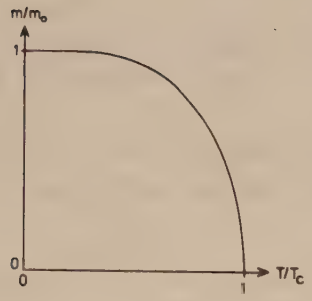


Fig. 21: m/m_c als Funktion von T/T_c.

Soweit wir feststellen konnten, wurde der in Fig. 21 wiedergegebene und in den Gl. (3c-85,86,89) ausgedrückte Zusammenhang zwischen m und m_0 zuerst von Jacobs [32] angegeben, die richtige kritische Temperatur findet sich allerdings auch bei anderen Autoren [33,138].

Natürlich können wir auch die Tadpole-Gleichung verwenden, um das Verhältnis m/m_0 zu berechnen. Dazu ist das Integral in (3c-66) gemäß (3c-76) auszuwerten, so daß wir $\left(\sigma_0 = m\frac{\sqrt{N}}{\lambda}\mu^{n/2-1}\right)$

$$(1+z_\sigma)m\frac{\sqrt{N}}{\lambda}\mu^{n/2-1} - \lambda\sqrt{N}\mu^{1-n/2}m\frac{1}{(2\pi^2)^{n/2}}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\int d\tilde{p}_0\int d^{n-1}\vec{p}\,\frac{e^{i\nu(\beta\tilde{p}_0-\pi)}}{\tilde{p}_0^2+\vec{p}^{\,2}+m^2} \qquad (3c\text{-}90)$$

erhalten. Neben der trivialen Lösung $m=0$ haben wir noch die aus

$$1+z_\sigma = \frac{\lambda^2}{(2\pi^2)^{n/2}}\mu^{2-n}\,2\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}(-1)^\nu\int_0^\infty d\tilde{p}_0\int d^{n-1}\vec{p}\,\frac{\cos(\nu\beta\tilde{p}_0)}{\tilde{p}_0^2+\vec{p}^{\,2}+m^2} \qquad (3c\text{-}91)$$

zu bestimmende Lösung. Mit den Regeln (3a-31,32) kann die Integration über $d^{n-1}\vec{p}$ leicht ausgeführt werden. Das ergibt

$$1+z_\sigma = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}}\mu^{2-n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3-n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\,2\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}(-1)^\nu\int_0^\infty d\tilde{p}_0\,\frac{\cos(\nu\beta\tilde{p}_0)}{(\tilde{p}_0^2+m^2)^{(3-n)/2}}\,. \qquad (3c\text{-}92)$$

Mit der im Anhang I gegebenen Formel (I-2) kann die verbliebene Integration durchgeführt werden, was auf

$$1+z_\sigma = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}}\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-n/2} 2^{n/2} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (-1)^\nu (|\nu|\beta m)^{1-n/2} K_{1-n/2}(|\nu|\beta m) \qquad (3c\text{-}93)$$

führt. Wegen $x^\gamma k_\gamma(x) \to 2^{\gamma-1}\Gamma(\gamma)$ für $x \to 0 \,(\mathrm{Re}\,\gamma > 0)$ kann der $\nu = 0$ Term isoliert werden, wonach (3c-80) das Ergebnis

$$1+z_\sigma = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}}\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-n/2}\left[\Gamma\left(1-\tfrac{n}{2}\right) - 2^{1+n/2}(\beta m)^{2-n} K_{n/2-1}(\beta m)\right] \qquad (3c\text{-}94)$$

impliziert. Hier ist deutlich zu sehen, daß tatsächlich nur der von $\nu = 0$ stammende Beitrag für $n \to 2$ divergiert. Um eine spezielle Definition von z_σ brauchen wir uns nicht zu kümmern, da wir die linke Seite in (3c-14) mit der rechten für $\beta \to \infty$ identifizieren können. Folglich finden wir die Relation

$$\frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2}\Gamma\left(1-\tfrac{n}{2}\right) = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}}\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-n/2}\left[\Gamma\left(1-\tfrac{n}{2}\right) - 2^{1+n/2}(\beta m)^{2-n} K_{n/2-1}(\beta m)\right]$$

oder

$$\left[\left(\frac{m^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2} - 1\right]\Gamma\left(1-\tfrac{n}{2}\right) + 2^{1+n/2}(\beta m)^{2-n} K_{n/2-1}(\beta m) = 0 \;,$$

wodurch für $n \to 2$ gerade die aus (3c-83) schon bekannte Gleichung

$$\ln\left(\frac{m}{m_0}\right) + 2\,K_0(\beta m) = 0 \qquad (3c\text{-}95)$$

reproduziert wird. Auch hier sehen wir, daß die Tadpole-Gleichung schneller zum Ziel führt, als die Berechnung des effektiven Potentials.

Es ist bemerkenswert, daß es möglich ist, die in (3c-95) zum Ausdruck kommende Beziehung zwischen den physikalischen Größen m, m_0, β abzuleiten, ohne über z_σ detailliert zu verfügen. Es war zwar zu erwarten, daß man m/m_0 als Funktion von (βm_0) schreiben kann,

weil keine weiteren renormierungsunabhängigen Größen zur Verfügung stehen, aber daß man von (3c-94) nach (3c-95) kommt, ohne z_σ zu kennen, ist schon überraschend. Der Grund dafür ist darin zu suchen, daß z_σ die einzige Renormierungskonstante ist, welche in der gemachten Näherung von null verschieden ist. Sobald im nächsten Abschnitt höhere Näherungen betrachtet werden, wird deutlich, daß man von $z_\sigma, z_\psi, z_\lambda$ wenigstens über zwei Bescheid wissen muß. Die dritte kann dann in ähnlicher Weise wie oben eliminiert werden.

Was ist die Bedeutung der von der Temperatur abhängigen Masse m ? Unsere Ableitung verlangt die folgende Interpretation: Bei endlicher Temperatur benütze man vernünftigerweise eine selbskonsistente Lagrangedichte der Form (3c-7), wobei die darin auftretenden Größen $m, \sigma_0, \lambda, \mu$ untereinander und mit der Temperatur $T = 1/\beta$ in bestimmten Relationen stehen, welche in niedrigster Ordnung der $\frac{1}{N}$ -Entwicklung so aussehen:

$$m = \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \cdot \mu^{1-n/2} \quad \sigma_0 = \begin{cases} m_0 \, h(\beta m_0) \,, & \text{falls } \beta m_0 > \pi e^{-\gamma} \\ 0 \,, & \text{falls } \beta m_0 \leq \pi e^{-\gamma} \end{cases} ,$$

worin m_0 die gewöhnliche Ruhemasse der Fermionen ist und die Beziehung

$$B\left(\frac{m_0^2}{\mu^2}\right) = \frac{2\pi}{\lambda^2}$$

gilt. Nichtwechselwirkende Fermionen propagieren mit dem freien Teil der Lagrangedichte (3c-7), d.h. bei endlicher Temperatur ist der Fermion-Propagator durch (siehe Anhang H)

$$S_\beta(x-y) = \int_\beta d^4p \, e^{-ip\cdot(x-y)} \, \frac{i}{(2\pi)^n} \, \frac{\not p - m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \qquad \text{(3c-96)}$$

gegeben. (Das Integral ist selbstverständlich gemäß (3c-76) auszuwerten.) Die Größe m ist also die "effektive Masse" der Fermionen im Temperaturbad. Bei überkritischer Temperatur ist m null, das effektive Potential $V_1^\beta(w)$ hat sein Minimum bei $w = 0$, und die selbstkonsistente Lagrangedichte ist chiralsymmetrisch.

Erniedrigt sich die Temperatur, so erfolgt bei $T = T_c$ gewissermaßen ein Phasenübergang: Die Fermionen erhalten eine Masse, sie frieren aus. Sehr gut ist das an den Schaubildern in Fig. 20 und Fig. 21 zu sehen. Da die Größe der Fermionmasse mit dem Erwartungswert von $\sigma \sim \bar{\psi}\psi$ zusammenhängt, kann man das ganze als einen Paarungseffekt wie bei der Supraleitung verstehen. Tatsächlich sind die ersten von Nambu und Jona-Lasinio angestellten Überlegungen zur Massenerzeugung durch Symmetriebrechung in relativistischen Quantenfeldtheorien stark von der BCS-Theroie inspiriert [139]. So war es nur natürlich, daß später Kirzhnits und Linde auf die Idee kamen, daß in Analogie zum Meißner-Effekt bei hohen Temperaturen die gebrochenen Symmetrien wieder hergestellt werden [140]. Die ersten konkreten Arbeiten dazu stammen von Weinberg [29] sowie Dolan und Jackiw [28].

Die genannte Analogie zur Supraleitung ist zwar sehr nützlich, aber sie kann leicht auf Abwege führen, wenn man sie zu wörtlich nimmt. Besonders wenn es sich um gebrochene Eichsymmetrien handelt, können gänzlich andere Verhältnisse herrschen. So hat z.B. Weinberg ein Beispiel genannt, wo die Symmetrie nur oberhalb einer kritischen Temperatur gebrochen ist [29]. Auch in der QCD ist möglicherweise bei höherer Temperatur die Symmetrie stärker gebrochen, wobei jedoch vorbehaltlich gesagt werden muß, daß hier stark kontroverse Meinungen anzutreffen sind [24-27]. Ferner kann der Fall eintreten, daß die Symmetriebrechung gar keine Temperaturabhängigkeit zeigt. Das ist etwa im Schwinger-Modell der Fall [39]. Außerdem kann - und das ist gerade für eine Theorie des Big Bang wichtig - eine gekrümmte Metrik bewirken, daß auch bei eigentlich unterkritischen Temperaturen keine Symmetriebrechung einsetzt. Dieses merkwürdige Verhalten ist für einige Modelle gesichert, doch hängt es stark davon ab, welches Modell verwendet wird und in welcher Weise der Raum gekrümmt ist [8,46]. Hier sind noch viele Fragen zu beantworten.

Als Kuriosum sei erwähnt, daß von Primack und Sher die Möglichkeit erwogen wurde, daß selbst das Photon bei Temperatur null eine Masse bekommt [143]. Nur sei im Augenblick das Weltall

noch zu heiß für Photonen, deren null-Temperatur-Masse demnach höchstens einige 10^{-4} eV betragen könnte. Ohne ein Prophet zu sein, kann man behaupten, daß diese Hypothese nicht viele Anhänger finden wird.

3c5) Elastische Streuung

Die von der Temperatur abhängige Masse m ist gewissermaßen eine statische Eigenschaft der Gross-Neveu-Fermionen, auch wenn sie dynamischen Ursprungs ist. Es liegt daher nahe noch einen typischen dynamischen Prozeß und seine Temperaturabhängigkeit zu betrachten. Das einfachste Beispiel ist die Fermion-Fermion-Streuung.

Wenn die Teilchen 1 und 2 ein- und die Teilchen 3 und 4 auslaufen, so ist der elastische Wirkungsquerschnitt proportional zum Betragsquadrat der 4-Punkt-Funktion $\tilde{G}_\beta^{(4)}(p_1, p_2; p_3, p_4)$, wobei alle p_j auf der Massenschale sind und wegen der Impulserhaltung $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ gelten muß. In niedrigster Ordnung der $\frac{1}{N}$-Näherung tragen dazu die Graphen in Fig. 22 bei. Dabei sind die Vertices durch $\tilde{G}_\beta^{(2)}(k)$ verbunden, was in der betrachteten Näherung durch die Graphen in Fig. 23 gegeben ist.

Fig. 22: Beiträge niedrigster Ordnung zu $\tilde{G}_\beta^{(4)}(p_1, p_2; p_3, p_4)$.

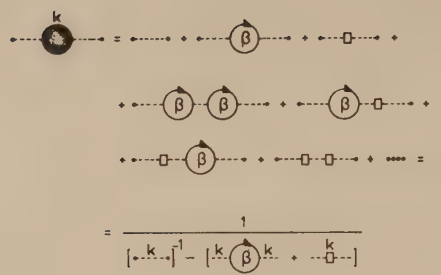


Fig. 23: Beiträge niedrigster Ordnung zu $\tilde{G}_\beta^{(2)}(k)$.

Das relative Minuszeichen in Fig. 22 ist bekanntlich eine Folge der Fermi-Statistik. Fig. 22, 23 sind gleichbedeutend mit

$$\tilde{G}_\beta^{(4)}(p_1, p_2; p_3, p_4) = (2\pi)^2 \frac{\lambda^2}{N} \left\{ \tilde{G}_\beta^{(2)}(p_1 - p_3) - \tilde{G}_\beta^{(2)}(p_1 - p_4) \right\} \tag{3c-97}$$

und

$$\tilde{G}_\beta^{(2)}(k) = -\frac{1}{\tilde{\Gamma}_\beta^{(2)}(k)} \quad , \tag{3c-98}$$

worin $\tilde{\Gamma}_\beta^{(2)}(k)$ durch die Graphen in Fig. 18 gegeben ist, welche für einen durchgehenden Impuls k und zur Temperatur $T = 1/\beta$ auszuwerten sind. Also

$$\tilde{\Gamma}_\beta^{(2)}(k) = \left\{ \frac{(2\pi)^n}{i} (1 + 2\sigma) + \left[(2\pi)^n i \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \mu^{1-n/2} \right]^2 (-1) N \mathrm{Tr} \int_\beta d^n p \left[\frac{i}{(2\pi)^n} \right]^2 \frac{\not{p} - m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{\not{p} - \not{k} - m}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \right\} \Bigg|_{n \to 2} ,$$

oder wenn wir (3c-94) für $\beta \to \infty$, $m \to m_0$ berücksichtigen:

$$\tilde{\Gamma}_\beta^{(2)}(k) = \left\{ \frac{(2\pi)^{n/2}}{i} \lambda^2 \left(\frac{\mu^2}{m_0^2} \right)^{1-n/2} \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) - 2^{n/2} \lambda^2 \mu^{2-n} \int_\beta d^n p \, \frac{p \cdot (p-k) + m^2}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)((p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon)} \right\} \Bigg|_{n \to 2} . \tag{3c-99}$$

Dieser Ausdruck ist im Anhang L weiterverarbeitet, wobei sich herausstellt, daß er sich für $k_o = o$ stark vereinfacht. Wenn wir ins Schwerpunktsystem gehen, haben wir

$$p_1 = (E, \vec{p}) \quad , \quad p_2 = (E, -\vec{p}) \, ,$$
$$p_3 = (E, \vec{p}') \quad , \quad p_4 = (E, -\vec{p}') \qquad \text{(3c-100)}$$

mit

$$E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}} = \sqrt{m^2 + \vec{p}'^{\,2}} \quad , \quad \vec{p}^{\,2} = \vec{p}'^{\,2} \, ,$$

so daß für die übertragenen Impulse in (3c-97) gilt:

$$p_1 - p_3 = (o, \vec{p} - \vec{p}') \quad , \quad p_1 - p_4 = (o, \vec{p} + \vec{p}') \, .$$

Wir brauchen daher $\tilde{\Gamma}^{(2)}_\beta(k)$ tatsächlich nur für $k_o = o$. Aus dem Anhang L entnehmen wir

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}_\beta(k)\Big|_{k_o=o} = \frac{2\pi}{i}\lambda^2 \left\{ \ln\left(\frac{m}{m_o}\right)^2 + B\left(\frac{m^2}{\vec{k}^2}\right) + \int_0^1 d\alpha \, \frac{d}{dz}\left(4z\, I_o(z)\right)\Big|_{z=\sqrt{(\beta m)^2 + \alpha(1-\alpha)\vec{k}^2}} \right\} =$$

$$= \frac{2\pi}{i}\lambda^2 \begin{cases} 4\mathcal{F}\left(\left(\frac{\beta m}{\pi}\right)^2, \left(\frac{\beta m}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{\beta \vec{k}}{2\pi}\right)^2\right) & \text{für } \beta > \beta_c \\ \ln\left(\beta_c/\beta\right)^2 + 4\mathcal{F}\left(o, \left(\frac{\beta \vec{k}}{2\pi}\right)^2\right) & \text{für } \beta \le \beta_c \end{cases} \equiv \qquad \text{(3c-101)}$$

$$\equiv \frac{2\pi}{i}\lambda^2 \, C_\beta(\vec{k}^2) \, .$$

Die darin auftretende Funktion $\mathcal{F}(\xi, \eta)$ ist durch

$$\mathcal{F}(\xi, \eta) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi + (2\ell-1)^2}} \, \frac{\eta}{\eta + (2\ell-1)^2}$$

definiert.

Die Streuamplitude $m_\beta(\vec{p}, \vec{p}')$ ist daher durch

$$m_\beta(\vec{p}, \vec{p}') = G^{(4)}_\beta(p_1, p_2; p_3, p_4)\Big|_{p_j \text{ aus (3c-100)}}$$
$$= \frac{2\pi}{iN}\left\{ \frac{1}{C_\beta(s)} - \frac{1}{C_\beta(t)} \right\} \qquad \text{(3c-102)}$$

gegeben, worin $s = (\vec{p} - \vec{p}')^2$, $t = (\vec{p} + \vec{p}')^2$.

Wie (3c-102) zeigt, ist es uns gelungen, die Streuamplitude und damit auch den Streuquerschnitt als Funktion nur der physikalischen Variablen $\beta, \beta_c, s, \epsilon$ zu schreiben, denn das in (3c-101) auftretende m kann vermöge (3c-95) zugunsten von m_0 bzw. mit (3c-89) zugunsten von β_c eliminiert werden. Erneut war es nicht erforderlich, über z_6 detailliert zu verfügen, da der allgemeine Zusammenhang (3c-94) genügte, um z_6 aus den Ausdrücken für $\bar{\Pi}_\beta^{(\ell)}(k)$ zu entfernen.
Wenn wir mittels

$$\vec{p}^{\,2} = \vec{p}^{\,\prime 2} = q^2 \,, \quad \vec{p}\cdot\vec{p}^{\,\prime} = q^2 \cos\vartheta$$

den Streuwinkel ϑ einführen, können wir auch

$$\mathfrak{M}_\beta(q,\vartheta) = \frac{2\pi}{iN}\left\{\frac{1}{G_\beta\left((2q\sin\frac{\vartheta}{2})^2\right)} - \frac{1}{G_\beta\left((2q\cos\frac{\vartheta}{2})^2\right)}\right\} \qquad \text{(3c-103)}$$

schreiben.

Da wir nur eine Raumdimension haben, erfordert die Einführung des Streuwinkels ϑ eine Erläuterung. Wie schon mehrfach betont wurde, handelt es sich bei der betrachteten Theorie um ein Modell, und wir studieren Modelle, um ein Gefühl dafür zu bekommen, was sich möglicherweise in realistischen Theorien ereignen könnte. So gesehen, ist ϑ ein sinnvoller Streuwinkel, der nicht auf $\vartheta = 0, \pi$ beschränkt ist.

Der Streuquerschnitt ist proportional zu $|\mathfrak{M}|^2$. Da wir an der Temperaturabhängigkeit interessiert sind, betrachten wir die normierte Größe ($\beta = 1/T$)

$$g_1\left(\frac{q}{m_0}, \vartheta, \frac{T}{T_c}\right) = \frac{|\mathfrak{M}_\beta(q,\vartheta)|^2}{|\mathfrak{M}_\infty(q,\vartheta)|^2} \,. \qquad \text{(3c-104)}$$

Die numerische Auswertung von (3c-104) erzeugte die Diagramme in Fig. 24-26.

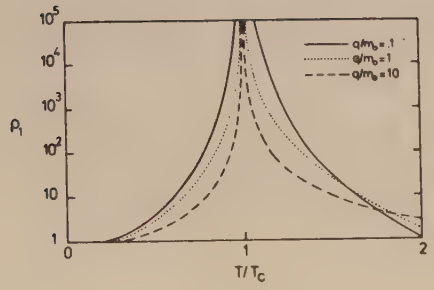


Fig. 24: ρ_1 als Funktion von T/T_c für $\vartheta = 0°$ und $q/m_0 = 0.1, 1, 10$.

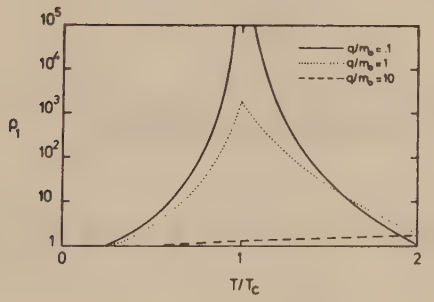


Fig. 25: ρ_1 als Funktion von T/T_c für $\vartheta = 60°$ und $q/m_0 = 0.1, 1, 10$.

Hier sind einige Kommentare zu den Fig. 24-26: Da die Ableitung von $m(T)$ nach T an der Stelle $T = T_c$ unendlich ist, beobachten wir im allgemeinen eine "Ecke" an dieser Stelle, es sei denn, daß q und ϑ ganz bestimmte Werte annehmen; z.B. $q/m_0 = 10$ und $\vartheta \approx 60°$, siehe Fig. 25 oder 26. Für $\vartheta = 0°$ und $T = T_c$ ist der Wirkungsquerschnitt sogar unendlich, weil die rechte Seite von (3c-101) für $\beta = \beta_c$ und $k^{*2} = 0$ gleich null

ist. Für $q \leq \omega_0$ ist die "Ecke" immer vorhanden. Wie Fig. 24 und 25 zeigen, gibt es eine starke Temperaturabhängigkeit, die schwächer wird, wenn q wächst. Das ist ein sinnvolles Verhalten, da für größere q der Einfluß der Temperatur weniger wichtig sein sollte. Indem wir Fig. 24 und 25 vergleichen, stellen wir fest, daß die ϑ-Abhängigkeit für große q viel stärker ist. Schließlich zeigt Fig. 26 in welcher Weise ϱ_1 vom Streuwinkel ϑ abhängt, falls $q > \omega_0$ ist. Es ist zu beachten, daß die Skala für ϱ_1 in Fig. 24-26 logarithmisch ist.

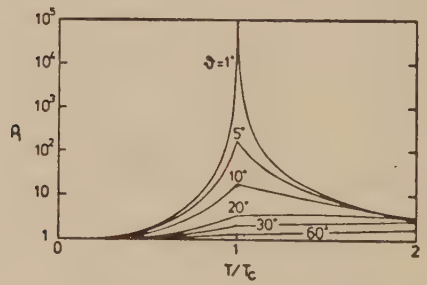


Fig. 26: ϱ_1 als Funktion von T/T_c für $q/\omega_0 = 10$ und $\vartheta = 1°, 5°, 10°, 20°, 30°, 60°$.

Man hat insgesamt den Eindruck, daß eine Messung von ϱ_1 eher geeignet ist, um Temperatureffekte zu entdecken, als eine Messung von $\omega(T)$, siehe Fig. 21, denn ϱ_1 ändert sich merklich im Bereich niedriger Temperaturen, wo $\omega(T)$ fast konstant ist.

Wären wir an der ϑ-Abhängigkeit des Streuquerschnittes interessiert, so sollten wir

$$\varrho_2\left(\frac{q}{\omega_0}, \vartheta, \frac{T}{T_c}\right) = \frac{|\mathcal{M}_\beta(q,\vartheta)|^2}{|\mathcal{M}_\beta(q,0)|^2} \qquad (3c\text{-}105)$$

betrachten, worin wir jetzt eine ϑ-unabhängige Normierung haben. Die numerische Auswertung von (3c-105) zeigt, daß es immer einen recht scharfen Vorwärts-Rückwärts-Peak gibt. Ein illustrierendes Beipiel ist in Fig. 27 gegeben. Es ist deutlich zu sehen, daß man thermische Effekte in ϱ_2 viel schwieriger entdecken kann als in ϱ_1 .

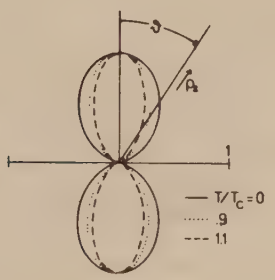


Fig. 27: Polardiagramm von ϱ_2 als Funktion von ϑ für $q/\omega_0 = 1$ und $T/T_c = 0, 0.9, 1.1$.

Endlich könnten wir uns für die q-Abhängigkeit interessieren. Dann sollten wir uns mit

$$\varrho_3\left(\frac{q}{\omega_0}, \vartheta, \frac{T}{T_c}\right) = \frac{|m_\beta(q,\vartheta)|^2}{|m_\beta(\omega_0,\vartheta)|^2} \qquad \text{(3c-106)}$$

befassen, wobei jetzt die Normierung q-unabhängig ist. ϱ_3 ist in Fig. 28 graphisch dargestellt. Wie man sieht, hängt die Gestalt der Kurven ganz entscheidend von der Temperatur ab. Deshalb könnte ein Gerät, das ϱ_3 als Funktion von q mißt, als ein "Quantenfeld-Thermometer" dienen.

Damit sind wir am Ende des Abschnittes 3c angelangt. Die originellen Teile dieses Abschnittes sind in [124] veröffentlicht, woraus auch die Fig. 20-28 entnommen sind. Der folgende Abschnitt

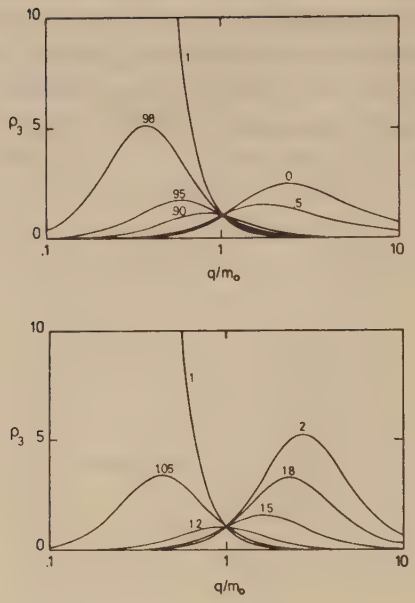


Fig. 28: ϱ_3 als Funktion von q für $\vartheta = 60°$ und
(a) $T/T_c = 0, 0.5, 0.9, 0.95, 0.98, 1$;
(b) $T/T_c = 1, 1.05, 1.2, 1.5, 1.8, 2$.

3d geht über den Inhalt von [124] hinaus, indem er sich mit Näherungen höherer Ordnung befaßt.

3d) Korrekturen höherer Ordnung

Im vorangehenden Abschnitt 3c haben wir die niedrigste Ordnung der $\frac{1}{N}$-Näherung betrachtet, wobei sich herausstellte, daß sie mit der ein-Loop-Näherung übereinstimmt. Es wäre nun wünschenswert, die nächste Ordnung zu berechnen. Leider ist das in der $\frac{1}{N}$-Entwicklung so kompliziert, daß es mir bislang nicht gelungen ist, diese Rechnungen durchzuführen. Daher sind

wir gezwungen, hier nur die zwei-Loop-Näherung zu betrachten, obwohl wir ja aus Abschnitt 3b wissen, daß wir von dieser Näherung keine besonders guten und verläßlichen Ergebnisse erwarten dürfen. Die Ergebnisse dieses Abschnitts werden das bestätigen.

In zwei-Loop-Näherung tragen zur Tadpole-Gleichung die Graphen der Fig. 29 bei. Die Renormierungskonstanten sind dabei durch die in Fig. 30 gegebenen Bedingungen festgelegt. Dabei ist

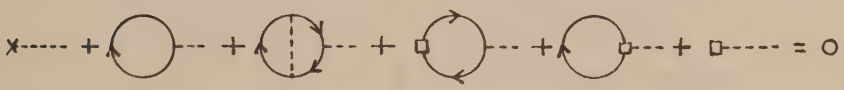


Fig. 29: Die Tadpole-Gleichung in zwei-Loop-Näherung.

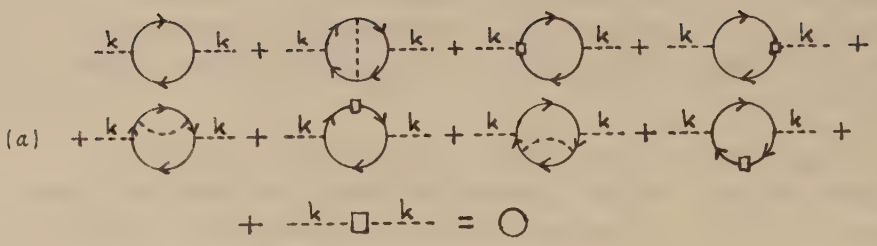
eine selbstkonsistente Renormierung gemeint. Die entsprechenden Graphen der nächsten $\frac{1}{N}$-Ordnung sind in Fig. 31 dargestellt. Offenbar sind die komplizierten σ-Propagatoren daran schuld, daß es bisher unmöglich war, diese Graphen auszuwerten (selbst bei Temperatur null). Wie schon gesagt, beschränken wir uns daher auf die zwei-Loop-Näherung.

Indem wir Fig. 29 mit den Feynman-Regeln (3c-65) übersetzen, erhalten wir

$$m\Big\{1+z_\sigma+(1+z_\lambda)\lambda^2\mu^{2-n}\frac{i}{(2\pi)^n}\frac{1}{m}\,\mathrm{Tr}\int_\beta d^nP\,\frac{\not P-m}{P^2-m^2+i\varepsilon}\,\cdot\,+$$

$$+\frac{\lambda^4}{N}\mu^{4-2n}\frac{1}{(4\pi^2)^n}\frac{1}{m}\,\mathrm{Tr}\int_\beta d^nP\left[\frac{\not P-m}{P^2-m^2+i\varepsilon}\right]^2\int_\beta d^nQ\,\frac{\not Q-m}{Q^2-m^2+i\varepsilon}\,+ \qquad (3d\text{-}1)$$

$$+\lambda^2\mu^{2-n}\frac{1}{(2\pi)^n i}\frac{1}{m}\,\mathrm{Tr}\int_\beta d^nP\left[\frac{\not P-m}{P^2-m^2+i\varepsilon}\right]^2(z_4\not P+z_\lambda m)\Big\}=0\,.$$



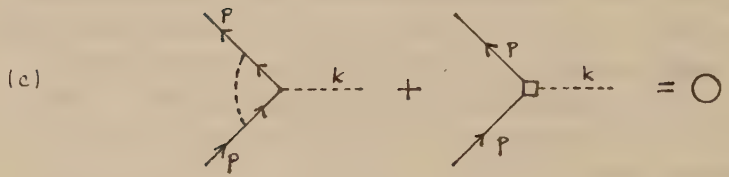


Fig. 30: Renormierungsbedingungen in zwei-Loop-Näherung.

(a) Zu erfüllen für $k^2=-\mu^2$, d.h. für raumartiges k .

(b) Zu erfüllen für $\not{p}=-m_0$, d.h. auf der Massenschale.

(c) Zu erfüllen für $\not{p}=-m_0$ und $k=0$, d.h. am symmetrischen Punkt.

Die darin auftretenden Integrale sind im Anhang M berechnet. Mit den dortigen Ergebnissen läßt sich (3d-1) folgendermaßen schreiben:

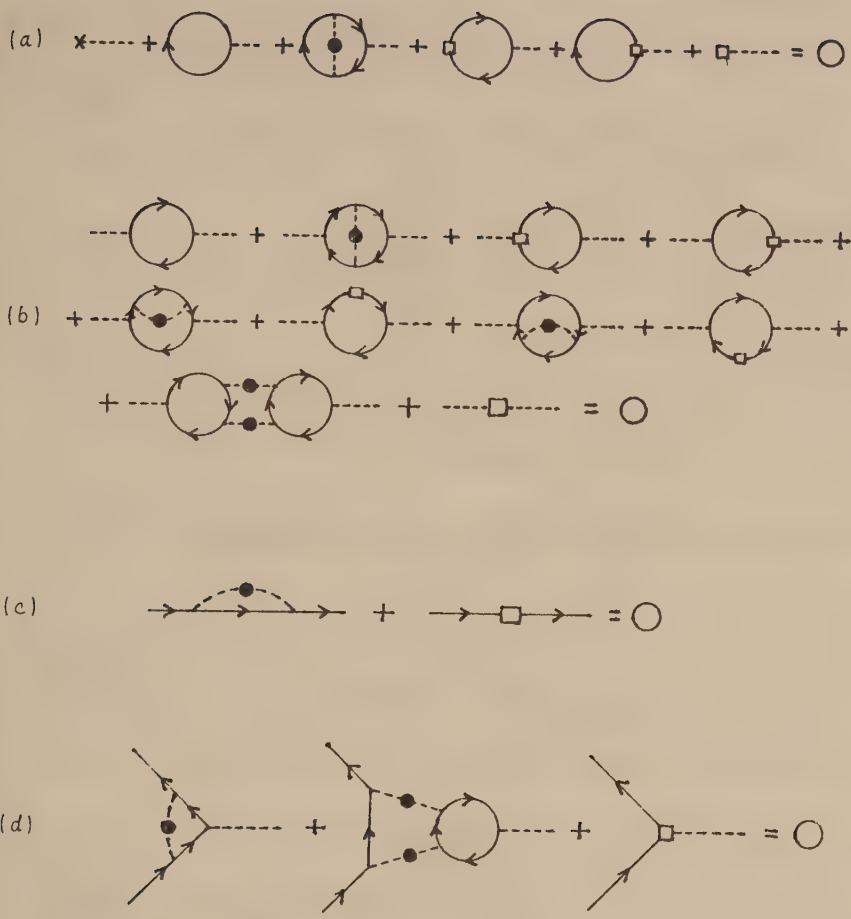


Fig. 31: Die Tadpole-Gleichung (a) und die Renormierungsbedingungen (b-d) zur Ordnung $(\frac{1}{N})^1$. Für (b-d) gilt das in Fig. 30 gesagte. Der modifizierte σ-Propagator ist der in Fig. 23 gegebene, wobei dort z_σ in $(\frac{1}{N})^0$-Näherung zu verwenden ist.

$$m\left\{1+z_\sigma-\frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}}\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-n/2}A_{1-n/2}(\beta m)-2\frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}}\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-n/2}(z_\lambda-z_\psi)\left[A_{1-n/2}(\beta m)-A_{2-n/2}(\beta m)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda^4}{N}\frac{1}{(8\pi^2)^{n/2}}\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{2-n}A_{1-n/2}(\beta m)\left[2A_{2-\frac{n}{2}}(\beta m)-A_{1-\frac{n}{2}}(\beta m)\right]\right\}=0\,. \qquad (3d\text{-}2)$$

Darin haben wir die abkürzende Schreibweise

$$A_\gamma(x)=\Gamma(\gamma)\,2^{2-\gamma}x^{2\gamma}\,\mathcal{K}_{-\gamma}(x)=2\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}(-1)^\nu\left(\frac{|\nu|x}{2}\right)^\nu K_\gamma(|\nu|x) \qquad (3d\text{-}3)$$

verwendet.

Um (3d-2) weiterverarbeiten zu können, brauchen wir die Differenz $(z_\lambda - z_\psi)$. Dazu werten wir Fig. 3Ob aus (natürlich für $T = 1/\beta = 0$). Das führt zunächst auf

$$\left[(2\pi)^n i\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\mu^{1-n/2}\right]^2\int d^nq\,\frac{i}{(2\pi)^n}\,\frac{1}{q^2-m_0^2+i\varepsilon}\cdot\frac{1}{(2\pi)^n i}+(2\pi)^n i\,(-z_\psi m_0+z_\lambda m_0)=0, \qquad (3d\text{-}4)$$

folglich

$$z_\lambda - z_\psi = \frac{\lambda^2}{N}\,\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\,\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2}\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right), \qquad (3d\text{-}5)$$

was eingesetzt in (3d-2) folgendes Resultat ergibt:

$$m\left\{1+z_\sigma-\frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}}\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-n/2}A_{1-\frac{n}{2}}(\beta m)-\frac{\lambda^4}{N}\frac{1}{(8\pi^2)^{n/2}}\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{2-n}*\right. \qquad (3d\text{-}6)$$

$$\left.*\left[2\left(\frac{m^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2}\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(A_{1-n/2}(\beta m)-A_{2-n/2}(\beta m)\right)+A_{1-n/2}(\beta m)\left(2A_{1-n/2}(\beta m)-A_{1-n/2}(\beta m)\right)\right]\right\}=0$$

Wie in der ein-Loop-Näherung hat diese Gleichung zwei Lösungen. Oberhalb der kritischen Temperatur ist $m=0$, während für $T<T_c$ die geschweifte Klammer verschwindet. Insbesondere haben wir daher für $T=0$:

$$1+z_\sigma=\frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2}\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)+\frac{\lambda^4}{N}\frac{1}{(8\pi^2)^{n/2}}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{2-n}\Gamma^2\left(1-\frac{n}{2}\right). \qquad (3d\text{-}7)$$

Das setzen wir in (3d-6) ein, wonach dort der Grenzübergang $n \to 2$ durchgeführt werden kann. Im einzelnen ergibt sich:

$$m \frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}} \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-n/2} \left(\left(\frac{m^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2} \Gamma(1-\tfrac{n}{2}) - A_{1-\frac{n}{2}}(\beta m) \right) *$$

$$* \left[1 + \frac{\lambda^2}{N} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-n/2} \left(\left(\frac{m^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2} \Gamma(1-\tfrac{n}{2}) - A_{1-\frac{n}{2}}(\beta m) + 2 A_{2-\frac{n}{2}}(\beta m) \right) \right]_{|_{n \to 2}} = \qquad (3d\text{-}8)$$

$$= m \frac{\lambda^2}{2\pi} \left(\ln\left(\frac{m^2}{m_0^2}\right) + 4 K_0(\beta m) \right) \left[1 + \frac{\lambda^2}{N} \frac{1}{4\pi} \left(\ln\left(\frac{m^2}{m_0^2}\right) + 4 K_0(\beta m) + 2 - 4 (\beta m)^2 K_{-1}(\beta m) \right) \right] = 0$$

Das ist die zu (3c-83) analoge Gleichung in der zwei-Loop-Näherung. Sie hat zunächst drei Lösungen für m:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad m = 0 \,, \\ &\text{(b)} \quad \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) + 2 K_0(\beta m) = 0 \,, \qquad (3d\text{-}9) \\ &\text{(c)} \quad 1 + \frac{\lambda^2}{N} \frac{1}{4\pi} \left(\ln\left(\frac{m^2}{m_0^2}\right) + 4 K_0(\beta m) + 2 - 4 (\beta m)^2 K_{-1}(\beta m) \right) = 0 \,. \end{aligned}$$

Für $\beta \to 0$ ist nur (a) zu erfüllen, d.h. für große Temperaturen ist die Masse, wie erwartet, gleich null. Für $\beta \to \infty$, $m \to m_0$ hingegen ist nur (b) sinnvoll, so daß für kleine Temperaturen m durch diese Gleichung gegeben ist, was im übrigen gerade das ein-Loop-Ergebnis ist. Gibt es nun einen Zwischenbereich, in welchem (c) gilt? Nein, und zwar aus mehreren Gründen.

Erstens: In diesem Zwischenbereich wäre m eine Funktion von m_0, β und λ. Da aber λ renormierungsabhängig ist, müßte dann auch mindestens eine der Größen m, m_0, β renormierungsabhängig sein. Das darf jedoch nicht der Fall sein, denn diese drei Größen sind observabel. Zweitens: Die kritische Temperatur ergäbe sich zu

$$T_c = m_0 \frac{1}{\pi} \exp\left(\gamma - \frac{4\pi}{\lambda^2} N\right)$$

und hätte daher für $N \to \infty$ nicht den Wert der ein-Loop-Rechnung, den sie annehmen müßte. Überhaupt läßt sich in (3d-9c) der Limes $N \to \infty$ nicht vollziehen. Drittens: Zu (3d-9c) gehört immer

ein relatives Maximum des effektiven Potentials, niemals ein Minimum. Um das einzusehen, erinnern wir uns daran, daß die Tadpole-Gleichung äquivalent ist zu (siehe 3c-82)

$$\frac{d}{dw} V^{\beta}(w)\Big|_{w=m/m_0} = 0 .$$

Aus (3d-8) folgt daher in Analogie zur ein-Loop-Rechnung

$$\frac{d}{dw} V_2^{\beta}(w) = \frac{N}{2\pi} m_0^2 w \left(\ln w^2 + 4K_0(\beta m_0 |w|)\right)\left[1 + \frac{\lambda^2}{N}\frac{1}{4\pi}\left(\ln w^2 + 4K_0(\beta m_0|w|) + \right.\right. \tag{3d-10}$$
$$\left.\left. + 2 - 4(\beta m_0 w)^2 K_{-1}(\beta m_0 |w|)\right]\right],$$

was sich in kompakter Form auch so schreiben läßt:

$$\frac{d}{dw} V_2^{\beta}(w) = \frac{N}{2\pi} m_0^2 \left\{w\left(\ln w^2 + 4K_0(\beta m_0|w|)\right)\right\}\left[1 + \frac{\lambda^2}{4\pi N}\frac{d}{dw}\left\{w\left(\ln w^2 + 4K_0(\beta m_0|w|)\right)\right\}\right]$$
$$= \frac{N}{2\pi} m_0^2 \frac{d}{dw}\left\{\frac{2\pi}{N m_0^2} V_1^{\beta}(w)\right\}\left[1 + \frac{\lambda^2}{4\pi N}\frac{d^2}{dw^2}\left\{\frac{2\pi}{N m_0^2} V_1^{\beta}(w)\right\}\right]. \tag{3d-11}$$

Dabei haben wir das ein-Loop-Potential $V_1^{\beta}(w)$ aus (3c-81) verwendet. Die Integration von (3d-4) ist nun ganz leicht; sie ergibt

$$V_2^{\beta}(w) = V_1^{\beta}(w) + \left(\frac{\lambda}{2N m_0}\frac{d}{dw} V_1^{\beta}(w)\right)^2. \tag{3d-12}$$

Zu $V_1^{\beta}(w)$ wird also ein stets positiver Term addiert, der an den Extrema von $V_1^{\beta}(w)$ verschwindet. Die Extrema von V_1^{β} sind also auch Extrema von V_2^{β}. Bestenfalls kann dabei aus einem relativen Maximum von V_1^{β} ein relatives Minimum von V_2^{β} werden, wobei dann ein zusätzliches Zwischenmaximum erzeugt wird; aber - und nur das ist für uns wichtig - das absolute Minimum von V_1^{β} ist mit dem absoluten Minimum von V_2^{β} immer identisch, wobei die Größe von λ in (3d-12) völlig unerheblich ist. Zur

Illustration diene Fig. 32.

Zusammenfassend stellen wir daher fest, daß die Temperaturabhängigkeit der dynamischen Masse m in zwei-Loop- und in ein-Loop-Näherung dieselbe ist; beidesmal gilt Fig. 21.

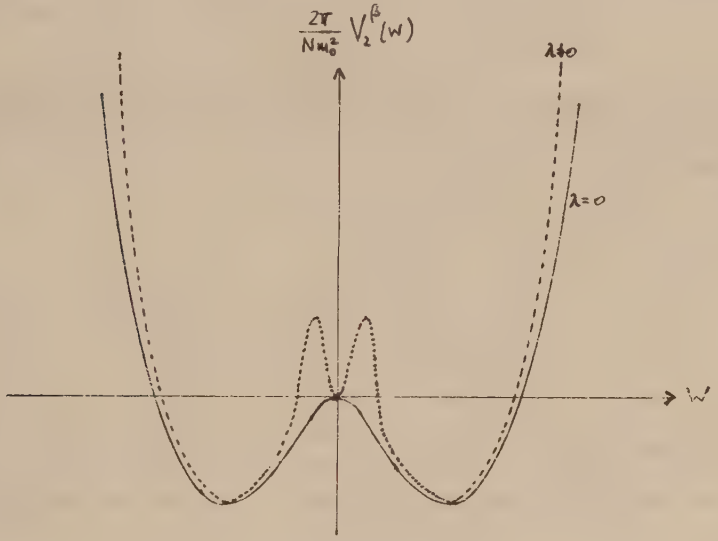


Fig. 32: $(2\pi/N m_0^2)\, V_2^\beta(w)$ als Funktion von w für $\beta = \infty$ und verschiedene λ. (Skizze).

Als nächstes wollen wir die selbstkonsistente Massenformel in zwei-Loop-Näherung berechnen. Dazu benötigen wir in (3d-7) die linke Seite, wozu wir die Graphen in Fig. 30 auswerten müssen. Fig. 30b führte uns bereits auf (3d-5), während Fig. 30c den folgenden Zusammenhang liefert:

$$\left[(2\pi)^4 i \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \mu^{1-4/2}\right]^3 \int d^4q \left[\frac{i}{(2\pi)^4} \frac{q\!\!\!/ - m_0}{q^2 - m_0^2 + i\varepsilon}\right]^3 \frac{1}{(2\pi)^4 i} + (2\pi)^4 i z_\lambda \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \mu^{1-4/2} = 0 \qquad (3d\text{-}13)$$

oder

$$z_\lambda = \frac{\lambda^2}{N}\,\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2}(n-1)\,\Gamma(1-n/2). \qquad (3d\text{-}14)$$

Damit folgt aus (3d-5)

$$z_\varphi = \frac{\lambda^2}{N}\,\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2}(n-2)\,\Gamma(1-n/2), \qquad (3d\text{-}15)$$

was für $n \to 2$ offensichtlich endlich ist. Fig. 30a involviert eine längere Rechnung, die im Anhang N zu finden ist. Von dort übernehmen wir

$$z_\sigma = \frac{\Gamma(1-\frac{n}{2})(n-1)}{(2\pi)^{n/2}}\,\lambda^2\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2}\Big\{ R_{1-n/2}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right) - \\ - \frac{\Gamma(1-\frac{n}{2})}{(4\pi)^{n/2}}\,\frac{\lambda^2}{N}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2}\Big[(n-1)R^2_{1-\frac{n}{2}}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right) - (2-n)\,R_{2-\frac{n}{2}}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)\Big] + \qquad (3d\text{-}16) \\ + 2\,(z_\lambda - z_\varphi)\Big[R_{1-n/2}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right) - (1-\tfrac{n}{2})\,R_{2-n/2}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)\Big]\Big\},$$

worin die Abkürzung

$$R_\gamma(y) = \int_0^1 \frac{dx}{[1+x(1-x)y]^\gamma} \qquad (3d\text{-}17)$$

zur Anwendung kam. Indem wir nun von (3d-5) Gebrauch machen, ergibt sich aus (3d-16)

$$z_\sigma = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^{n/2}}\,\Gamma(1-\tfrac{n}{2})(n-1)\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2} R_{1-\frac{n}{2}}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)\Big\{1 + \frac{\lambda^2}{N}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(1-n/2)}{(4\pi)^{n/2}}\Big[2-(n-1)R_{1+\frac{n}{2}}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)\Big]\Big\}. \qquad (3d\text{-}18)$$

Die selbstkonsistenten Renormierungskonstanten sind also in (3d-14,15,18) gegeben. Einsetzen von z_σ in die Tadpole-Gleichung zu Temperatur null, die wir in (3d-7) gefunden haben, liefert jetzt die selbstkonsistente Massenformel in zwei-Loop-Näherung. Zunächst folgt aus (3d-7) und (3d-18)

$$I = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}} \left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-\frac{n}{2}} \Gamma\left(1-\tfrac{n}{2}\right)\left[1-(n-1)R_{1-\frac{n}{2}}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)\right]\left\{1+\frac{\lambda^2}{N}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2}\frac{\Gamma(1-n/2)}{(4\pi)^{n/2}}\left[1-(n-1)R_{1-n/2}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)\right]\right\}. \quad \text{(3d-19)}$$

Wegen

$$\lim_{n\to 2} \Gamma\left(1-\tfrac{n}{2}\right)\left[1-(n-1)R_{1-\frac{n}{2}}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)\right] = \mathcal{B}\left(\frac{m_0^2}{\mu^2}\right),$$

was ein Ergebnis der ein-Loop-Rechnung war, kann hier leicht der Limes $n \to 2$ vollzogen werden. Das führt auf

$$I = \frac{\lambda^2}{2\pi}\,\mathcal{B}\left(\frac{m_0^2}{\mu^2}\right)\left\{1+\frac{\lambda^2}{4\pi N}\,\mathcal{B}\left(\frac{m_0^2}{\mu^2}\right)\right\} \quad \text{(3d-20)}$$

oder

$$\mathcal{B}\left(\frac{m_0^2}{\mu^2}\right) = \frac{2\pi}{\lambda^2}\,N\left(-1\pm\sqrt{1+\frac{2}{N}}\right).$$

Damit wir für $N\to\infty$ das ein-Loop-Ergebnis (3c-56) wieder erhalten, muß das positive Vorzeichen gewählt werden. Also lautet die selbstkonsistente Massenformel in zwei-Loop-Näherung

$$\mathcal{B}\left(\frac{m_0^2}{\mu^2}\right) = \frac{2\pi}{\lambda^2}\,N\left(-1+\sqrt{1+\frac{2}{N}}\right). \quad \text{(3d-21)}$$

Sie geht aus dem ein-Loop-Ergebnis hervor, indem man die Substitution

$$\lambda^2 \longrightarrow \frac{\lambda^2}{N\left(-1+\sqrt{1+2/N}\right)} \quad \text{(3d-22)}$$

macht. Es ist bemerkenswert, daß die zwei-Loop-Rechnung die Massenformel um die Ordnung $\frac{1}{N}$ modifiziert und nicht eine Korrektur der Ordnung $\frac{\lambda^2}{N}$ liefert, obwohl das für alle Zwischenergebnisse zutrifft.

Die Massenformel (3d-21) wurde zuerst von Fleming und Furuya [79] angegeben, doch sind in der genannten Arbeit nicht alle Zwischenergebnisse korrekt.

Kann man auch die Gross-Neveusche Massenformel (3c-52) durch eine zwei-Loop-Rechnung verbessern? Um diese Frage zu beantworten, ist es erforderlich, die Renormierungskonstanten in der symmetrischen Theorie auszurechnen, d.h. man muß Fig. 3O mit den Feynman-Regeln (3a-24) auswerten. Für Fig. 3Oa heißt das, daß wir in (3d-16) den Grenzübergang $m_0 \to 0$ machen müssen. Mit Hilfe von

$$\lim_{m_0 \to 0} \left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{\gamma} R_\gamma\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right) = \lim_{x \to \infty} x^{\gamma} R_\gamma(x) = \int_0^1 \frac{dx}{[x(1-x)]^{\gamma}} \equiv r_\gamma \tag{3d-23}$$

ist das nicht schwierig. Man erhält

$$z_\sigma = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}} \Gamma\left(1-\tfrac{n}{2}\right)(n-1)\left\{ r_{1-\frac{n}{2}} - \frac{\lambda^2}{N} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma\left(1-\tfrac{n}{2}\right)(n-1) r_{1-\frac{n}{2}}^2 + 2(z_\lambda - z_\psi)\, r_{1-\frac{n}{2}} \right\}. \tag{3d-24}$$

Fig. 3Ob impliziert für alle p

$$z_\psi = 0. \tag{3d-25}$$

Um Fig. 3Oc mit den Feynman-Regeln der symmetrischen Theorie benutzen zu können, müssen wir statt $k=0$ die Forderung $k^2 = -\mu^2$ stellen, weil andernfalls das Integral infrarotdivergent ist. Das ergibt

$$z_\lambda = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\lambda^2}{N} \Gamma\left(1-\tfrac{n}{2}\right)(n-1)\, r_{1-\frac{n}{2}}. \tag{3d-26}$$

Wir setzen (3d-25,26) in die Tadpole-Gleichung (3d-2) und in (3d-24) ein. Die Resultate sind

$$\begin{aligned} m\Big\{ 1 + z_\sigma &- \frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}} \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-n/2} A_{1-n/2}(\beta_m) - \\ &- \frac{\lambda^4}{N} \frac{1}{(8\pi^2)^{n/2}} \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-n/2} \Big[2\Gamma\left(1-\tfrac{n}{2}\right)(n-1) r_{1-\frac{n}{2}} \left(A_{1-n/2}(\beta_m) - A_{2-n/2}(\beta_m)\right) + \\ &+ \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-n/2} A_{1-n/2}(\beta_m) \left(2A_{2-n/2}(\beta_m) - A_{1-n/2}(\beta_m)\right) \Big] \Big\} = 0 \end{aligned} \tag{3d-27}$$

sowie

$$z_\sigma = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}} \Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)(n-1)\,\gamma_{1-\frac{n}{2}} \left\{ 1 + \frac{\lambda^2}{N} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)(n-1)\,\gamma_{1-n/2} \right\}. \qquad (3d\text{-}28)$$

Daraus bekommen wir die Massenformel, indem wir (3d-27) für $\beta \to \infty$, $m = m_0$ nehmen und z_σ aus (3d-28) einsetzen. Das führt auf das Analogon zu (3d-19):

$$1 = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}} \Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)\left[\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-\frac{n}{2}} - (n-1)\,\gamma_{1-\frac{n}{2}}\right]\left\{ 1 + \frac{\lambda^2}{N} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)(n-1)\left[\gamma_{1-\frac{n}{2}} - \left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-\frac{n}{2}}\right]\right\}, \qquad (3d\text{-}29)$$

worin wir mit

$$\lim_{n \to 2} \Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)\left[\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2} - (n-1)\,\gamma_{1-n/2}\right] = \ln\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)$$

zum Fall $n = 2$ übergehen können. Das liefert

$$1 = \frac{\lambda^2}{2\pi} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)\left\{ 1 + \frac{\lambda^2}{4\pi N}\left(2 - \ln\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)\right)\right\}, \qquad (3d\text{-}30)$$

was der Gleichung (3d-20) entspricht. Somit

$$m_0 = \mu \exp\left[-\frac{\pi}{\lambda^2}\left(\left(N + \frac{\lambda^2}{2\pi}\right) - \sqrt{\left(N + \frac{\lambda^2}{2\pi}\right)^2 - 2N}\right)\right]. \qquad (3d\text{-}31)$$

Der Vergleich mit dem ein-Loop-Ergebnis (3c-52) zeigt, daß λ gemäß

$$\lambda^2 \longrightarrow \frac{\lambda^2}{\left(N + \lambda^2/2\pi\right) - \sqrt{\left(N + \lambda^2/2\pi\right)^2 - 2N}} \qquad (3d\text{-}32)$$

oder wenn wir $\lambda^2/2\pi$ neben N vernachlässigen, gemäß

$$\lambda^2 \longrightarrow \frac{\lambda^2}{N\left(1 - \sqrt{1 - 2/N}\right)} \qquad (3d\text{-}33)$$

zu substituieren ist. Bis auf die Vorzeichen stimmt (3d-33) mit dem Ergebnis der selbstkonsistenten Rechnung (3d-22) überein.

Die Temperaturabhängigkeit der Masse erhalten wir, indem wir (3d-27) für $\beta \to \infty$, $m = m_0$ nehmen und damit $1+z_\sigma$ in (3d-27) eliminieren. Das führt auf

$$
\begin{aligned}
& m \frac{\lambda^2}{(4\pi)^{n/2}} \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-n/2} \Big\{ 2^{1+n/2} (\beta m)^{2-n} K_{\frac{n}{2}-1}(\beta m) + \Gamma\left(1-\tfrac{n}{2}\right)\left(\left(\frac{m^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2} - 1\right) + \\
& + \frac{\lambda^2}{N} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \Big[\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-n/2} 2^{2+n} (\beta m)^{2-n} K_{\frac{n}{2}-1}(\beta m) \Big((\beta m)^{2-n} K_{\frac{n}{2}-1}(\beta m) - (\beta m)^{4-n} K_{\frac{n}{2}-2}(\beta m) \Big) + \\
& + \Gamma\left(1-\tfrac{n}{2}\right) \Big(\big(2(n-1) r_{1-n/2} - n \left(\tfrac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-n/2}\big) 2^{1+n/2} (\beta m)^{2-n} K_{\frac{n}{2}-1}(\beta m) - \\
& - 2\big((n-1) r_{1-n/2} - \left(\tfrac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-n/2}\big) 2^{n/2} (\beta m)^{4-n} K_{\frac{n}{2}-2}(\beta m) \Big) + \\
& + \Gamma^2\left(1-\tfrac{n}{2}\right) \left(\left(\frac{m^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2} - 1 \right) \left(n r_{1-n/2} - \left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-\frac{n}{2}} - \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-n/2} \right) \Big] \Big\} \Big|_{n \to 2} = \qquad \text{(3d-34)} \\
& = m \frac{\lambda^2}{2\pi} \left(\ln\left(\frac{m^2}{m_0^2}\right) + 4 K_0(\beta m) \right) \left[1 + \frac{\lambda^2}{N} \frac{1}{4\pi} \left(\ln\left(\frac{m^2}{m_0^2}\right) + 4 K_0(\beta m) + 2 - 4 (\beta m)^2 K_{-1}(\beta m) \right) \right] - \\
& - m \frac{\lambda^4}{N} \frac{1}{4\pi^2} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right) \left[\ln\left(\frac{m^2}{m_0^2}\right) + 4 K_0(\beta m) - 2 (\beta m)^2 K_{-1}(\beta m) \right] = 0 .
\end{aligned}
$$

Nur für den Fall $\mu = m_0$ ist diese Gleichung mit (3d-8) identisch, und nur in diesem Fall bekommt man eine Beziehung zwischen m, m_0 und β die frei von renormierungsabhängigen Parametern ist. Das bedeutet aber, daß uns der Versuch, mit Renormierungs-

konstanten der symmetrischen Theorie zu arbeiten, in arge Verlegenheit gebracht hat. Denn erstens sollten Ergebnisse, die Beobachtungsgrößen betreffen, keine spezielle Wahl von μ erfordern, und zweitens verbietet sich die Wahl $\mu = m_0$ wegen (3d-30).

Das sind die Schwierigkeiten, von denen im Abschnitt 3c2 die Rede war, als wir feststellten, daß und warum man vernünftigerweise selbstkonsistent renormieren sollte.

Zusammenfassend müssen wir sagen, daß uns die zwei-Loop-Näherung bei nüchterner Betrachtung keinen Fortschritt gegenüber der ein-Loop-Näherung gebracht hat. Die Temperaturabhängigkeit der Masse ist dieselbe, die selbstkonsistente Massenformel enthält lediglich ein modifiziertes λ und das effektive Potential bekommt einen additiven Zusatzterm, welcher nicht ernst genommen werden darf, da er unphysikalische Zwischenmaxima erzeugt. Es bleibt zu hoffen, daß die Berechnung der gesamten Korrekturen der Ordnung $\frac{1}{N}$ eine wirkliche Verbesserung der ein-Loop-Ergebnisse bringen wird.

Anhang A. Zur Bedeutung des effektiven Potentials.

Zur Erläuterung des Variationsprinzips in Abschnitt 3c und zur dortigen Definition des effektiven Potentials wollen wir hier ein einfaches quantenmechanisches Beispiel betrachten.

Zum harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k x^2 \tag{A-1}$$

sollen die effektiven Potentiale zu x und x^2 berechnet werden. Diese sind in Analogie zu Abschnitt 3c wie folgt definiert:

(a) Das effektive Potential $V_x(a)$ ist das Minimum des Erwartungswertes von H, also

$$V_x(a) = \min \langle \phi | H | \phi \rangle , \tag{A-2a}$$

wobei die zur Variation zugelassenen Zustände $|\phi\rangle$ den Nebenbedingungen

$$\langle \phi | \phi \rangle = 1 \tag{A-3a}$$

und

$$\langle \phi | x | \phi \rangle = a$$

gehorchen müssen.

(b) Das effektive Potential $V_{x^2}(s)$ ist das Minimum des Erwartungswertes von H, also

$$V_{x^2}(s) = \min \langle \Psi | H | \Psi \rangle , \tag{A-2b}$$

wobei die zur Variation zugelassenen Zustände $|\Psi\rangle$ den Nebenbedingungen

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = 1 \tag{A-3b}$$

und

$$\langle \Psi | x^2 | \Psi \rangle = s$$

gehorchen müssen.

Wenn wir Lagrangesche Multiplikatoren E, A bzw. $E, \mathcal{S}$ einführen, dann sind die Variationsaufgaben äquivalent zu den Eigenwertgleichungen

(a) $$(H - E(A) - Ax)\,|\phi\rangle = 0\,, \tag{A-4a}$$

(b) $$(H - E(\mathcal{S}) - \mathcal{S}x^2)\,|\Psi\rangle = 0. \tag{A-4b}$$

Also sind die Energien $E(A)$ und $E(\mathcal{S})$ die Grundzustandsenergien der A - bzw. $\mathcal{S}$-abhängigen Hamiltonoperatoren

$$H_A = H - Ax\,, \tag{A-5a}$$

und $$H_{\mathcal{S}} = H - \mathcal{S}x^2. \tag{A-5b}$$

Diese können umgeschrieben werden in

$$H_A = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}k\left(x - \frac{A}{k}\right)^2 - \frac{A^2}{2k}\,, \tag{A-6a}$$

$$H_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}(k - 2\mathcal{S})x^2\,, \tag{A-6b}$$

so daß wir für die Energien einfach

$$E(A) = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}} - \frac{A^2}{2k} \tag{A-7a}$$

und $$E(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\frac{k - 2\mathcal{S}}{m}} \tag{A-7b}$$

finden. Damit folgt aus den Eigenwertgleichungen (A-4) zusammen mit den Nebenbedingungen (A-3) für die effektiven Potentiale

$$V_x(a) = \langle \phi | H_A + Ax | \phi \rangle = E(A) + Aa \qquad \text{(A-8a)}$$

sowie

$$V_{x^2}(s) = \langle \Psi | H_\beta + \beta x^2 | \Psi \rangle = E(\beta) + \beta s . \qquad \text{(A-8b)}$$

Jetzt benötigt man nur noch den Zusammenhang zwischen den Lagrangeschen Multiplikatoren A, β und den Parametern a, s. Die Gleichungen (A-8) haben die Form von Legendre-Transformationen, weshalb wir durch Differentiation auf

$$a = -\frac{dE(A)}{dA} = \frac{A}{k} \quad , \quad A = ka \qquad \text{(A-9a)}$$

und

$$s = -\frac{dE(\beta)}{d\beta} = \frac{\hbar}{2m}\sqrt{\frac{m}{k-2\beta}} \, , \; \beta = \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{4}\frac{\hbar^2}{ms^2}\right) \qquad \text{(A-9b)}$$

schließen. Indem wir dann (A-9) in (A-8) substituieren, erhalten wir die gesuchten effektiven Potentiale

$$V_x(a) = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{1}{2}ka^2 \qquad \text{(A-10a)}$$

und

$$V_{x^2}(s) = \frac{1}{2}ks + \frac{\hbar^2}{8ms} . \qquad \text{(A-10b)}$$

Aus der Konstruktion von V_x und V_{x^2} folgt, daß die Erwartungswerte von x bzw. x^2 im Grundzustand $|0\rangle$ von H durch die Lage der Minima der zugehörigen effektiven Potentiale gegeben sind. Also

$$\langle 0 | x | 0 \rangle = a_0 \quad \text{mit} \quad V_x(a_0) = \min_a V_x(a) \qquad \text{(A-11a)}$$

sowie

$$\langle 0 | x^2 | 0 \rangle = s_0 \quad \text{mit} \quad V_{x^2}(s_0) = \min_{s>0} V(s) \, , \qquad \text{(A-11b)}$$

was die bekannten Werte $a_c = 0$ und $s_0 = \frac{\hbar}{2\sqrt{mk}}$ ergibt. Außerdem finden wir selbstverständlich die Grundzustandsenergie von H als $E_0 = V_x(a_0) + V_{x^2}(s_0) = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{k/m}$. Die Gleichungen (A-11) sind natürlich analog zu (3c-13).

Ergänzend sei noch vermerkt, daß die Zusammenhänge (A-9) natürlich auch direkt aus den Nebenbedingungen abgeleitet werden können. Dazu muß man jedoch $|\phi\rangle$ und $|\Psi\rangle$explizit benutzen, was einen erheblich größeren Aufwand bedeutet. Der Vollständigkeit wegen sei das jedoch hier vorgeführt.

Dazu brauchen wir die zu H_A und H_S gehörigen in der üblichen Weise definierten Auf- und Absteigeoperatoren α_A, α_A^+ bzw. α_S, α_S^+. $|\phi\rangle$ und $|\Psi\rangle$ sind dann durch

$$\alpha_A|\phi\rangle = 0, \quad \langle\phi|\phi\rangle = 1$$

und

$$\alpha_S|\Psi\rangle = 0, \quad \langle\Psi|\Psi\rangle = 1$$

bis auf eine irrelevante Phase festgelegt. Die Beziehungen

$$x = \frac{A}{k} + \left(\frac{\hbar^2}{4mk}\right)^{1/4}(\alpha_A + \alpha_A^+)$$

und

$$x = \left(\frac{\hbar^2}{4m(k-2\beta')}\right)^{1/4}(\alpha_S + \alpha_S^+)$$

implizieren daher

$$a = \langle\phi|x|\phi\rangle = \frac{A}{k}$$

sowie

$$s = \langle\Psi|x^2|\Psi\rangle = \left(\frac{\hbar^2}{4m(k-2\beta')}\right)^{1/2},$$

was mit den Gleichungen (A-9) übereinstimmt.

Anhang B. Zum Zusammenhang zwischen den Greenschen Funktionen und der effektiven Lagrangedichte.

Um von der Darstellung (3c-23) zu (3c-29) zu kommen, benutzen wir die Tatsache, daß die Greenschen Funktionen translationsinvariant sind. Zu $\Gamma^{(\nu)}(x_1 \cdots x_\nu)$ führen wir daher eine reduzierte Form $\Gamma^{(\nu)}_{red}(y_1 \cdots y_{\nu-1})$ ein, die nur von den $(\nu-1)$ Koordinatendifferenzen $y_\alpha = x_{\alpha+1} - x_1$ abhängt. Also setzen wir

$$\Gamma^{(\nu)}(x, x+y_1, x+y_2, \ldots, x+y_{\nu-1}) = \Gamma^{(\nu)}_{red}(y_1, y_2, \ldots, y_{\nu-1}) . \qquad (B\text{-}1)$$

Nun ist $\Gamma^{(\nu)}$ symmetrisch bei Vertauschen der Argumente. Daraus folgt, daß $\Gamma^{(\nu)}_{red}$ ebenfalls diese Symmetrie besitzt. Zum Beweis vertausche man auf der linken Seite von (B-1) beliebige Argumente $x+y_\alpha$ und $x+y_\beta$ miteinander. Wenn man jedoch in (B-1) die Argumente x und $x+y_1$ vertauscht, so findet man, daß $\Gamma^{(\nu)}_{red}$ noch die Symmetrieeigenschaft

$$\Gamma^{(\nu)}_{red}(y_1 \cdots y_{\nu-1}) = \Gamma^{(\nu)}_{red}(-y_1, y_2 - y_1, \ldots, y_{\nu-1} - y_1) \qquad (B\text{-}2)$$

hat. Die Symmetrieeigenschaften von $\Gamma^{(\nu)}_{red}$ schränken dieses stark ein. So kann z.B. $\Gamma^{(3)}_{red}(y_1, y_2)$ wegen (B-2) weder von $y_1 \cdot y_2$ noch von $(y_1^2 + y_2^2)$ getrennt abhängen, sondern nur von der Kombination $(y_1^2 - y_1 \cdot y_2 + y_2^2)$.

Setzt man (B-1) in (3c-23) ein, so ergibt sich

$$\mathcal{A}\{\sigma_c\} = \sum_\nu \frac{1}{\nu!} \int d^n x\, dy_1^n \cdots dy_{\nu-1}^n\, \Gamma^{(\nu)}_{red}(y_1 \cdots y_{\nu-1})\, \sigma_c(x)\, \sigma_c(x+y_1) \cdots \sigma_c(x+y_{\nu-1}) . \qquad (B\text{-}3)$$

Jetzt entwickeln wir $\sigma_c(x+y)$ in eine Taylorreihe um x :

$$\sigma_c(x+y) = \sigma_c(x) + \partial_\alpha \sigma(x)\, y^\alpha + \tfrac{1}{2} \partial_\alpha \partial_\beta \sigma(x)\, y^\alpha y^\beta + \ldots \qquad (B\text{-}4)$$

und setzen diese Entwicklung in (B-3) ein. Das ergibt zunächst

$$\mathcal{A}\{\sigma_c\} = \sum_\nu \frac{1}{\nu!} \int d^n x \,[\sigma_c(x)]^\nu \int d^n y_1 \cdots d^n y_{\nu-1}\, \Gamma^{(\nu)}_{red}(y_1 \cdots y_{\nu-1}) +$$

$$+ \sum_\nu \frac{1}{\nu!} \int d^n x \,[\sigma_c(x)]^{\nu-1} \partial_\alpha \sigma_c(x) \int d^n y_1 \cdots d^n y_{\nu-1} (y_1^\alpha + y_2^\alpha + \cdots + y_{\nu-1}^\alpha)\, \Gamma^{(\nu)}_{red}(y_1 \cdots y_{\nu-1}) +$$

$$+ \sum_\nu \frac{1}{\nu!} \int d^n x \,[\sigma_c(x)]^{\nu-2} \partial_\alpha \sigma_c(x) \partial_\beta \sigma_c(x) \int d^n y_1 \cdots d^n y_{\nu-1} \sum_{a<b} y_a^\alpha y_b^\beta\, \Gamma^{(\nu)}_{red}(y_1 \cdots y_{\nu-1}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_\nu \frac{1}{\nu!} \int d^n x \,[\sigma_c(x)]^{\nu-1} \partial_\alpha \partial_\beta \sigma_c(x) \int d^n y_1 \cdots d^n y_{\nu-1} \sum_a y_a^\alpha y_a^\beta\, \Gamma^{(\nu)}_{red}(y_1 \cdots y_{\nu-1}) +$$

+ Terme höherer Ordnung,

woraus nach partieller Integration

$$\mathcal{A}\{\sigma_c\} = \int d^n x \left(-V(\sigma_c(x)) + \frac{1}{2} \partial_\alpha \sigma_c(x) \partial_\beta \sigma_c(x)\, \mathcal{Z}^{\alpha\beta}(\sigma_c(x)) + \cdots \right) \qquad \text{(B-5)}$$

wird. Darin stehen V und $\mathcal{Z}^{\alpha\beta}$ für

$$V(\sigma_c(x)) = -\sum_\nu \frac{1}{\nu!} [\sigma_c(x)]^\nu \int d^n y_1 \cdots d^n y_{\nu-1}\, \Gamma^{(\nu)}_{red}(y_1 \cdots y_{\nu-1}) \qquad \text{(B-6)}$$

und

$$\mathcal{Z}^{\alpha\beta}(\sigma_c(x)) = \sum_\nu \frac{1}{\nu!} [\sigma_c(x)]^{\nu-2} \int d^n y_1 \cdots d^n y_{\nu-1} \left[\sum_{a \neq b} y_a^\alpha y_a^\beta - (\nu-1) \sum_a y_a^\alpha y_a^\beta \right] \Gamma^{(\nu)}_{red}(y_1 \cdots y_{\nu-1}). \qquad \text{(B-7)}$$

Gl. (B-6) ist zu (3c-30) äquivalent, wenn man

$$\Gamma^{(\nu)}(x_1 \cdots x_\nu) = \int \frac{d^n p_1}{(2\pi)^n} \cdots \frac{d^n p_\nu}{(2\pi)^n} e^{-i(p_1 x_1 + \cdots + p_\nu x_\nu)} \frac{1}{i} \tilde{\Gamma}^{(\nu)}(p_1 \cdots p_\nu)\, \delta(p_1 + \cdots + p_\nu) \qquad \text{(B-8)}$$

berücksichtigt. Der in (B-8) auftretende Faktor $\frac{1}{i}$ ist erforderlich, um die i's der Feynman-Reglen im Impulsraum zu kompensieren, da wir $\tilde{\Gamma}^{(\nu)}$ mit dem Impulsraum-Diagramm identifizieren wollen.

Um die Form (3c-29) zu beweisen, muß jetzt noch gezeigt werden, daß $Z^{\alpha\beta}$ proportional zu $g^{\alpha\beta}$ ist. Dazu benützen wir die Symmetrieeigenschaften von $\Gamma^{(\nu)}_{red}$. Zunächst impliziert die allgemeine Permutationssymmetrie, daß wir die Summen in (B-7) durch

$$(\nu-1)(\nu-2)\,\gamma_1^\alpha \gamma_2^\beta - (\nu-1)^2\,\gamma_1^\alpha \gamma_1^\beta$$

ersetzen können. Dann folgt aus (B-2), daß das Integral in (B-7) identisch ist mit

$$\int d^4\gamma_1 \cdots d^4\gamma_{\nu-1}\,\left((\nu-1)(\nu-2)\gamma_1^\alpha\gamma_2^\beta - (\nu-1)^2\gamma_1^\alpha\gamma_1^\beta\right)\Gamma^{(\nu)}_{red}(\gamma_1,\dots,\gamma_{\nu-1}) =$$

$$= \int d^4\gamma_1 \cdots d^4\gamma_{\nu-1}\,\left((\nu-1)(\nu-2)\gamma_1^\alpha\gamma_2^\beta - (\nu-1)^2\gamma_1^\alpha\gamma_1^\beta\right)\Gamma^{(\nu)}_{red}(-\gamma_1,\gamma_2-\gamma_1,\dots,\gamma_{\nu-1}-\gamma_1) =$$

$$= \int d^4\gamma_1 \cdots d^4\gamma_{\nu-1}\,\left((\nu-1)(\nu-2)(-\gamma_1^\alpha)(\gamma_2^\beta-\gamma_1^\beta) - (\nu-1)^2(-\gamma_1^\alpha)(-\gamma_1^\beta)\right)\Gamma^{(\nu)}_{red}(\gamma_1,\dots,\gamma_{\nu-1}) =$$

$$= \int d^4\gamma_1 \cdots d^4\gamma_{\nu-1}\,\left(-(\nu-1)(\nu-2)\gamma_1^\alpha\gamma_2^\beta - (\nu-1)\gamma_1^\alpha\gamma_1^\beta\right)\Gamma^{(\nu)}_{red}(\gamma_1,\dots,\gamma_{\nu-1}) = \%\ ,$$

oder nach Bildung des Mittelwertes des ersten und letzten Integrals:

$$\% = -\tfrac{1}{2}(\nu-1)\nu \int d^4\gamma_1 \cdots d^4\gamma_{\nu-1}\,\gamma_1^\alpha\gamma_1^\beta\,\Gamma^{(\nu)}_{red}(\gamma_1,\dots,\gamma_{\nu-1}) =$$

$$= -\tfrac{1}{2}(\nu-1)\nu \int d^4\gamma_1 \cdots d^4\gamma_{\nu-1}\,\gamma_1^\alpha\gamma_1^\beta\,\tfrac{1}{2}\left[\Gamma^{(\nu)}_{red}(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{\nu-1}) + \Gamma^{(\nu)}_{red}(-\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{\nu-1})\right],$$

was wegen (3a-20) gleich

$$-\tfrac{1}{2}(\nu-1)\nu\,\tfrac{1}{4}\,g^{\alpha\beta}\int d^4\gamma_1\cdots d^4\gamma_{\nu-1}\,\gamma_1^2\,\tfrac{1}{2}\left[\Gamma^{(\nu)}_{red}(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{\nu-1}) + \Gamma^{(\nu)}_{red}(-\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{\nu-1})\right] =$$

$$= -\tfrac{1}{2}(\nu-1)\nu\,\tfrac{1}{4}\,g^{\alpha\beta}\int d^4\gamma_1\cdots d^4\gamma_{\nu-1}\,\gamma_1^2\,\Gamma^{(\nu)}_{red}(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{\nu-1})$$

ist. Somit

$$\mathcal{Z}^{\alpha\beta}(\sigma_c(x)) = -\frac{1}{2n} g^{\alpha\beta} \sum_{\nu} \frac{1}{(\nu-2)!} [\sigma_c(x)]^{\nu-2} \int d^n y_1 \cdots d^n y_{\nu-1}\, y_1^2\, \Gamma^{(\nu)}_{red}(y_1 \cdots y_{\nu-1}). \qquad \text{(B-9)}$$

Auf analoge Weise erhält man höhere Terme in der Entwicklung (B-5).

Anhang C. Schritte zwischen (3c-47) und (3c-48).

Wenn wir in (3c-47) die Wick-Rotation (3a-26) durchführen und die Regel (3a-31) beachten, so erhalten wir

$$V_1(\sigma_c) = \frac{1}{2}(1+z_\sigma)\sigma_c^2 - \frac{N}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty Q^{n-1} \ln\left(1 + \frac{\lambda^2}{N} \frac{\mu^{2-n}\sigma_c^2}{Q^2 - i\varepsilon}\right) dQ. \qquad \text{(C-1)}$$

Da das Argument des Logarithums stets positiv ist, können wir das $i\varepsilon$ weglassen; andernfalls wäre es erforderlich, um über das Vorzeichen des Imaginärteils von $V(\sigma_c)$ Aufschluß zu geben. Eine partielle Integration in (C-1) führt auf

$$V_1(\sigma_c) = \frac{1}{2}(1+z_\sigma)\sigma_c^2 - \frac{N}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{2}{n} \int_0^\infty \frac{Q^{n-1}\, dQ}{1 + \frac{Q^2}{\frac{\lambda^2}{N}\mu^{2-n}\sigma_c^2}}, \qquad \text{(C-2)}$$

worin das verbleibende Integral mit Hilfe von (3a-32) gelöst werden kann. Daraus folgt sofort (3c-48):

$$\begin{aligned} V_1(\sigma_c) &= \frac{1}{2}(1+z_\sigma)\sigma_c^2 - \frac{N}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{2}{n} \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda^2}{N}\mu^{2-n}\sigma_c^2\right)^{n/2} \Gamma\left(\tfrac{n}{2}\right)\Gamma\left(1-\tfrac{n}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sigma_c^2 \left[1 + z_\sigma - \frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}} \frac{2}{n} \Gamma\left(1-\tfrac{n}{2}\right) \left(\frac{\frac{N}{\lambda^2}\mu^n}{\sigma_c^2}\right)^{1-n/2}\right]. \end{aligned} \qquad \text{(C-3)}$$

Anhang D. Von (3c-49) zu (3c-50).

Wegen

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon) \tag{D-1}$$

und

$$A^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon \ln A + O(\varepsilon^2) \tag{D-2}$$

folgt aus (3c-49) für $\varepsilon = 1 - n/2$:

$$V_1(\epsilon_c) = \frac{1}{2}\epsilon_c^2\left[1 + \frac{\lambda^2}{2\pi}(2\pi)^{\varepsilon}\Gamma^1(\varepsilon)\left((1-2\varepsilon)\int_0^1 \frac{d\alpha}{[\alpha(1-\alpha)]^{\varepsilon}} - \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{\frac{N}{\lambda^2}\mu^4}{\epsilon_c^4}\right)^{\varepsilon}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_c^2\left[1 + \frac{\lambda^2}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon^0)\right)\left(1 - 2\varepsilon - \varepsilon\int_0^1 d\alpha \ln(\alpha(1-\alpha)) - 1 - \varepsilon - \varepsilon \ln\left(\frac{N\mu^2}{\lambda^2\epsilon_c^2}\right) + O(\varepsilon^2)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_c^2\left[1 + \frac{\lambda^2}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{\epsilon_c^2}{\frac{N}{\lambda^2}\mu^2}\right) - 3 - \int_0^1 d\alpha \ln(\alpha(1-\alpha)) + O(\varepsilon)\right)\right]. \tag{D-3}$$

Mit

$$\int_0^1 d\alpha \ln(\alpha(1-\alpha)) = -2 \tag{D-4}$$

ergibt sich daraus (3c-50).

Anhang E. Das selbstkonsistente z_σ in ein-Loop-Näherung.

Verwendung des Propagators (3c-54) in Fig. 6 bedeutet, daß Gl. (3a-25) durch

$$z_\sigma = \frac{i}{(2\pi^2)^{n/2}} \lambda^2 \mu^{2-n} \int d^n p \, \frac{p\cdot(p-k) + m^2}{(p^2-m^2+i\varepsilon)\left((p-k)^2-m^2+i\varepsilon\right)} \Bigg|_{k^2=-\mu^2} \tag{E-1}$$

zu ersetzen ist. Statt (3a-28) müssen wir jetzt

$$z_\sigma = \frac{1}{(2\pi^2)^{n/2}} \lambda^2 \mu^{2-n} \int d^n \tilde{p} \, \frac{\tilde{p}\cdot(\tilde{p}-\tilde{k}) - m^2}{(\tilde{p}^2+m^2)\left((\tilde{p}-\tilde{k})^2+m^2\right)} \Bigg|_{\tilde{k}^2=+\mu^2} \tag{E-2}$$

schreiben. Der Feynmansche Trick (3a-29) und die Verschiebung

$$\tilde{p} \longrightarrow \tilde{p} + \alpha \tilde{k}$$

ergeben das Analogon zu (3a-30):

$$z_\sigma = \frac{1}{(2\pi^2)^{n/2}} \lambda^2 \mu^{2-n} \int_0^1 d\alpha \int d^n \tilde{p} \, \frac{\tilde{p}^2 - \alpha(1-\alpha)\tilde{k}^2 - m^2}{\left[\tilde{p}^2 + \alpha(1-\alpha)\tilde{k}^2 + m^2\right]^2} \Bigg|_{\tilde{k}^2=\mu^2}, \tag{E-3}$$

wobei wir diesmal die unsymmetrischen Teile gleich weggelassen haben. Da nun (E-3) aus (3a-30) durch die Substitution

$$\alpha(1-\alpha)\tilde{k}^2 \longrightarrow \alpha(1-\alpha)\tilde{k}^2 + m^2 \tag{E-4}$$

hervorgeht, können wir die $\tilde{p}$ -Integration überspringen und (3a-33) zu

$$z_\sigma = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^{n/2}} \Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)(n-1) \int_0^1 \frac{d\alpha}{\left[\alpha(1-\alpha) + \frac{m^2}{\mu^2}\right]^{1-n/2}} \tag{E-5}$$

verallgemeinern.

Zur Ableitung der in (3c-56) gegebenen Massenformel von Abarbanel substituieren wir gemäß (E-4) in (D-3) und erhalten

so für $\varepsilon = 1 - \frac{1}{2} \to 0$

$$V_1(\sigma_c) = \tfrac{1}{2}\sigma_c^2\left[1 + \frac{\lambda^2}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{\sigma_c^2}{\frac{N}{\lambda^2}\mu^2}\right) - 3 - \int_0^1 d\alpha \ln\left(\alpha(1-\alpha) + \frac{m^2}{\mu^2}\right)\right)\right]. \qquad \text{(E-6)}$$

Das Minimum dieses $V_1(\sigma_c)$ liegt bei

$$|\sigma_0| = \frac{\sqrt{N}}{\lambda}\mu \exp\left(-\frac{\pi}{\lambda^2} + 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 d\alpha \ln\left(\alpha(1-\alpha) + \frac{m^2}{\mu^2}\right)\right). \qquad \text{(E-7)}$$

Wenn wir den fundamentalen Zusammenhang zwischen σ_0 und m beachten, der in (3c-8) gegeben ist, so impliziert (E-7) die folgende Gleichung für m:

$$\frac{m}{\mu} = \exp\left(-\frac{\pi}{\lambda^2} + 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 d\alpha \ln\left(\alpha(1-\alpha) + \frac{m^2}{\mu^2}\right)\right),$$

woraus durch Logarithmieren

$$\frac{2\pi}{\lambda^2} = 2 + \int_0^1 d\alpha \ln\left(1 + \alpha(1-\alpha)\frac{\mu^2}{m^2}\right) \equiv \mathcal{B}\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \qquad \text{(E-8)}$$

folgt. Die darin vorkommende Funktion $\mathcal{B}(y)$ ist aus der Quantenelektrodynamik bekannt. Das Integral in (E-8) kann auf elementare Weise gelöst werden (siehe z.B. Jauch/Rohrlich [126], Appendix A5-3), so daß wir $(y > 0)$

$$\mathcal{B}(y) = 2\sqrt{1+4y}\ \operatorname{Arcoth}\sqrt{1+4y} \qquad \text{(E-9)}$$

schreiben können.

Anhang F. Zu $\mathcal{B}(y)$.

Wie im Anhang E ausgeführt, gilt für $\mathcal{B}(y)$, das durch

$$\mathcal{B}(y) = 2 + \int_0^1 d\alpha \ln\left(1 + \alpha(1-\alpha)\frac{1}{y}\right) \qquad \text{(F-1)}$$

definiert ist, die Gleichung

$$B(y) = 2\sqrt{1+4y}\ \operatorname{Arcoth}\sqrt{1+4y}\,. \tag{F-2}$$

Die Grenzfälle $y \ll 1$ und $y \gg 1$ sind leicht zu untersuchen. Insbesondere findet man aus (F-1), daß für $y \ll 1$

$$B(y) = 2 - \ln y + \int_0^1 d\alpha \ln(y+\alpha(1-\alpha)) \approx$$
$$\approx 2 - \ln y + \int_0^1 d\alpha \ln(\alpha(1-\alpha)) = -\ln y \tag{F-3}$$

gilt; dabei wurde (D-4) benutzt.
Im Fall $y \gg 1$ lernt man aus (F-2), daß

$$B(y) = 2\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)(1+4y)^{\ell}} = 2 + \frac{1}{6y} + O\left(\frac{1}{y^2}\right) \tag{F-4}$$

gilt.

Anhang G. Berechnung des effektiven Potentials zu $\mathcal{L}_{sc}$.

Dazu benötigen wir die $\tilde{\Gamma}^{(\nu)}_{(0,\dots,0)}$ zu $\mathcal{L}_{sc}$. Für $\nu=1$ sagt uns Gl. (3c-64), daß $\tilde{\Gamma}^{(1)}_{(0)}$ verschwindet, während $\tilde{\Gamma}^{(2)}_{(c,0)}$ in (3c-73) gegeben ist. Für $\nu \geq 3$ wollen wir $\tilde{\Gamma}^{(\nu)}_{(0,\dots,0)}$ hier berechnen. Das machen wir in ein-Loop-Näherung. Die beitragenden Diagramme sind in Fig. 13 gezeichnet, und die Rechnung ist analog zu der für $\mathcal{L}$ durchgeführten. Da jedoch jetzt wegen $m \neq 0$ die Diagramme nicht mehr infrarotdivergent sind, können wir $\tilde{\Gamma}^{(\nu)}(0,\dots,0)$ explizit ausrechnen, ohne vorher über ν zu summieren, wie das im symmetrischen Fall erforderlich war; siehe (3c-47)

In ein-Loop-Näherung haben wir also

$$\frac{i}{(2\pi)^n}\tilde{\Gamma}^{(\nu)}_{1}(0,\dots,0) = (\nu-1)!\,\frac{i}{(2\pi)^n}\left[(2\pi)^n i\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\mu^{1-n/2}\right]^{\nu}\left[\frac{i}{(2\pi)^n}\right]^{\nu}(-1)N\,\mathrm{Tr}\int d^np\left[\frac{\not p - m}{p^2-m^2+i\varepsilon}\right]^{\nu}$$
$$= (\nu-1)!\,\frac{i}{(2\pi)^n}\,\frac{\lambda^{\nu}}{\sqrt{N}^{\nu-2}}(-1)^{\nu+1}\mu^{\nu(1-n/2)}\int d^np\,\frac{\mathrm{Tr}(\not p - m)^{\nu}}{(p^2-m^2+i\varepsilon)^{\nu}}\,, \tag{G-1}$$

worin wir die Spur gemäß

$$Tr(\not p - m)^\nu = \tfrac{1}{2}\, Tr\left[(\not p - m)^\nu + (-\not p - m)^\nu\right] =$$

$$= 2^{n/2} \sum_{\rho=0}^{\nu} \binom{\nu}{\rho} (-1)^{\nu-\rho} \frac{1+(-1)^\rho}{2} (p^2)^{\rho/2} m^{\nu-\rho}$$

auswerten können, was nach der Wickrotation $p^2 \to -\tilde p^2 = -Q^2 < 0$ in

$$Tr(\not p - m)^\nu \to 2^{n/2} \sum_{\rho=0}^{\nu} \binom{\nu}{\rho} (-1)^\nu \frac{1+(-1)^\rho}{2}\, i^\rho Q^\rho m^{\nu-\rho} =$$

$$= 2^{n/2} (-1)^\nu \tfrac{1}{2}\left[(iQ+m)^\nu + (-iQ+m)^\nu\right] \qquad \text{(G-2)}$$

übergeht, so daß (G-1)

$$\frac{i}{(2\pi)^n} \widetilde{\Pi}_1^{(\nu)}(0,\dots,0) = (\nu-1)!\, \frac{i}{(2\pi)^n} \frac{\lambda^\nu}{\sqrt{N}^{\nu-2}} (-1)^{\nu-1} \mu^{\nu(1-n/2)}\, i\, 2^{n/2} (-1)^\nu \frac{2\sqrt{\pi}^n}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty Q^{n-1} dQ\, \frac{(iQ+m)^\nu + (-iQ+m)^\nu}{(-Q^2-m^2+i\varepsilon)^\nu} =$$

$$= (\nu-1)!\, \frac{(-1)^\nu}{(2\pi)^{n/2}} \frac{\lambda^\nu}{\sqrt{N}^{\nu-2}} \mu^{\nu(1-n/2)} \frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{2} \int_0^\infty Q^{n-1} dQ \left[\frac{1}{(-iQ+m)^\nu} + \frac{1}{(iQ+m)^\nu}\right] \qquad \text{(G-3)}$$

impliziert. In (G-3) kann für $\nu \geq 3$ der Grenzübergang $n \to 2$ leicht durchgeführt werden, da das Integral endlich ist. Zusammen mit

$$\frac{1}{(a+m)^\nu} = \frac{1}{(-3)(-4)\cdots(-\nu+1)} \left(\frac{\partial}{\partial m}\right)^{\nu-3} \frac{1}{(a+m)^3} =$$

$$= (-1)^{\nu-3} \frac{2}{(\nu-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial m}\right)^{\nu-3} \frac{1}{(a+m)^3}$$

folgt daraus

$$\frac{i}{(2\pi)^n} \widetilde{\Pi}_1^{(\nu)}(0,\dots,0) = -\frac{1}{\pi} \frac{\lambda^\nu}{\sqrt{N}^{\nu-2}} \left(\frac{\partial}{\partial m}\right)^{\nu-3} \int_0^\infty Q\, dQ\, \frac{-6Q^2 m + 2m^3}{(Q^2+m^2)^3} = \qquad \text{(G-4)}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^\nu}{\sqrt{N}^{\nu-2}} \left(\frac{\partial}{\partial m}\right)^{\nu-3} \frac{1}{m} = \frac{1}{\pi} (-1)^{\nu-3} (\nu-3)!\, \frac{\lambda^\nu m^{2-\nu}}{\sqrt{N}^{\nu-2}},$$

wobei (3a-32) zur Anwendung kam.

Einsetzen von (3c-64), (3c-73) und (G-4) in die Formel (3c-30) zur Berechnung des effektiven Potentials ergibt

$$V_1(\sigma_c) = \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\pi}\sigma_c^2 + \frac{1}{\pi}Nm^2\sum_{\nu=3}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu(\nu-1)(\nu-2)}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\frac{\sigma_c}{m}\right)^{\nu},$$

oder wenn wir wieder $w = \sigma_c/\sigma_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{N}}\frac{\sigma_c}{m}$ einführen:

$$V_1(w) = \frac{Nm^2}{\pi}\left[\frac{1}{2}w^2 + \sum_{\nu=3}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu(\nu-1)(\nu-2)}w^{\nu}\right]. \qquad (G\text{-}5)$$

Die Summe in (G-5) läßt sich in differenzierter Form leichter auswerten. Daher schreiben wir

$$\frac{d^2}{dw^2}V_1(w) = \frac{Nm^2}{\pi}\left[1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}w^{\nu}\right] = \frac{Nm^2}{\pi}\left[1 + \ln(1+w)\right] = \frac{Nm^2}{\pi}\frac{d}{dw}\left[(1+w)\ln(1+w)\right].$$

Folglich

$$\frac{d^2}{dw^2}V_1(w) = \frac{Nm^2}{\pi}\frac{d^2}{dw^2}\left[\frac{1}{4}(1+w)^2\left(\ln(1+w)^2 - 1\right)\right],$$

woraus unter Berücksichtigung von Integrationskonstanten

$$V_1(w) = \frac{Nm^2}{4\pi}\left[(1+w)^2\left(\ln(1+w)^2 - 1\right) + 1\right] \qquad (G\text{-}6)$$

folgt. Bis auf eine unwichtige additive Konstante stimmt das mit (3c-53) überein, sofern man dort w durch $1+v'$ ersetzt.

Anhang H. Feynman-Regeln bei endlicher Temperatur.

Um Feynman-Diagramme bei endlicher Temperatur auszuwerten, müssen wir die Propagatoren der freien Teilchen im Temperaturbad kennen. Wir brauchen also

$$S_\beta(x-y) = \frac{Tr\left(e^{-\beta H}\left(\psi_f(x)\,\bar{\psi}_f(y)\right)_+\right)}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)} \qquad (H\text{-}1)$$

und

$$\mathcal{D}_\beta(x-y) = \frac{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}(\sigma_f(x)\sigma_f(y))_+\right)}{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\right)}\,, \qquad \text{(H-2)}$$

wobei sich die Felder ψ_f und σ_f nach dem freien Teil der Lagrangedichte (3c-7) bzw. (3a-19) entwickeln. Für beliebiges β gehorchen die Propagatoren den Bewegungsgleichungen

$$(i\partial\!\!\!/_x + m)\, S_\beta(x-y) = i\,\delta(x-y) \qquad \text{(H-3)}$$

und

$$\left(\frac{1}{M^2}\Box_x - 1\right)\Big|_{M\to\infty} \mathcal{D}_\beta(x-y) = i\,\delta(x-y) \qquad \text{(H-4)}$$

oder

$$\mathcal{D}_\beta(x-y) = -i\,\delta(x-y). \qquad \text{(H-5)}$$

In (H-4) spielt M dieselbe Rolle wie im Zusammenhang mit (3a-13). Für freie σ-Teilchen ist der Propagator also unabhängig von der Temperatur immer durch (H-5) gegeben. Wegen der unendlichen Masse ist eine Modifikation weder erforderlich noch möglich.

Anders verhält es sich mit den Fermion-Feldern. Hier muß man noch die Frage beantworten, unter welchen Randbedingungen die Differentialgleichung (H-3) zu lösen ist. Dazu schreiben wir $S_\beta(x-y)$ in der Form

$$S_\beta(x-y) = \Theta(x^0-y^0)\,S_\beta^{>}(x-y) - \Theta(y^0-x^0)\,S_\beta^{<}(x-y), \qquad \text{(H-6)}$$

worin $S_\beta^{>}$ und $S_\beta^{<}$ durch

$$S_\beta^{>}(x-y) = \frac{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\psi_f(x)\bar{\psi}_f(y)\right)}{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\right)} \qquad \text{(H-7)}$$

und

$$S_\beta^<(x-y) = \frac{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\,\bar\psi_f(y)\,\psi_f(x)\right)}{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\right)} \qquad \text{(H-8)}$$

gegeben sind. Der in (H-7,8) vorkommende Hamiltonoperator generiert auch die Zeitentwicklung, d.h.

$$e^{iH\tau}\,\psi(x^0,\vec{x})\,e^{-iH\tau} = \psi(x^0+\tau,\vec{x}). \qquad \text{(H-9)}$$

Da wir unter der Spur zyklisch vertauschen dürfen, folgt daraus

$$\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\,\psi_f(x)\,\bar\psi_f(y)\right) = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\,\bar\psi_f(y)\,e^{-\beta H}\,\psi_f(x)\,e^{\beta H}\right),$$

was

$$S_\beta^<(x-y) = S_\beta^>(x-y)\Big|_{x^0=0\;x^0=i\beta} \qquad \text{(H-10)}$$

impliziert. Wenn wir nun die Zeitordnung in (H-6) auf komplexe Argumente ausdehnen, so ergibt sich damit, daß S_β der folgenden Periodizität genügt:

$$S_\beta(x-y)\Big|_{x^0=t} = -\,S_\beta(x-y)\Big|_{x^0=t-i\beta}\,. \qquad \text{(H-11)}$$

Das ist die gesuchte Randbedingung. Der Vorzeichenwechsel in (H-11) hat seinen Ursprung in der Fermi-Statistik, die sich in dem relativen Vorzeichen in (H-6) ausdrückt.

Da die Periodizität den Imaginärteil der Zeit betrifft, ist es naheliegend, durch

$$\tilde{x}_0 = i x_0 \qquad \text{(H-12)}$$

eine euklidische Zeit einzuführen. (Man vergleiche hierzu die Wick-Rotation (3a-26)). Statt (H-11) schreiben wir dann ($y=0$)

$$S_\beta(x^0,\vec{x}) = S_\beta(-i\tilde{x}_0,\vec{x}) = -S_\beta(-i(\tilde{x}_0+\beta),\vec{x}). \tag{H-13}$$

Wegen der Periodizität genügt es, das Intervall $-\beta/2 \le \tilde{x}_0 \le \beta/2$ zu betrachten. Dort können wir S_β als Fourierreihe für $\tilde{x}_0$ und Fourierintegral für $\vec{x}$ darstellen:

$$S_\beta(-i\tilde{x}_0,\vec{x}) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{-i(2\nu+1)\frac{\pi}{\beta}\tilde{x}_0} \int d\vec{p}^{\,u-1}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\, \tilde{S}_\beta\left(i(2\nu+1)\tfrac{\pi}{\beta},\vec{p}\right). \tag{H-14}$$

Nun muß (H-14) eine Lösung von (H-3) sein, wodurch wir $\tilde{S}_\beta$ bestimmen können:

$$\begin{aligned}
&(i\partial\!\!\!/ + m)\, S_\beta(-i\tilde{x}_0,\vec{x}) = \\
&= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{-i(2\nu+1)\frac{\pi}{\beta}\tilde{x}_0} \int d\vec{p}^{\,u-1}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \left[\gamma^0 i(2\nu+1)\tfrac{\pi}{\beta} - \vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m\right] \tilde{S}_\beta\left(i(2\nu+1)\tfrac{\pi}{\beta},\vec{p}\right) = \\
&= i\,\delta(x) = i\,\delta(x_0)\,\delta(\vec{x}) = -\delta(\tilde{x}_0)\,\delta(\vec{x}) = \\
&= -\frac{1}{\beta}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{-i(2\nu+1)\frac{\pi}{\beta}\tilde{x}_0} \int d\vec{p}^{\,u-1}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} (2\pi)^{1-u}.
\end{aligned} \tag{H-15}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt aufgrund der Poisson-Identität

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi\nu x} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \delta(x-\nu), \tag{H-16}$$

sofern man die Einschränkung $-\beta/2 \le \tilde{x}_0 \le \beta/2$ beachtet. Aus (H-15) schließen wir auf

$$\tilde{S}_\beta\left(i(2\nu+1)\frac{\pi}{\beta},\vec{p}\right) = -\frac{1}{\beta}\,\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\,\frac{1}{\gamma^0 i(2\nu+1)\frac{\pi}{\beta} - \vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m}$$

$$= \frac{2\pi i}{\beta}\,\frac{i}{(2\pi)^n}\,\frac{1}{\not{p}+m}\Bigg|_{p^0 = i(2\nu+1)\frac{\pi}{\beta}} \qquad \text{(H-17)}$$

$$= \frac{2\pi i}{\beta}\,\frac{i}{(2\pi)^n}\,\frac{\not{p}-m}{p^2-m^2}\Bigg|_{p^0 = i(2\nu+1)\frac{\pi}{\beta}} .$$

Die Division in (H-17) ist unproblematisch, da der Nenner nie gleich null wird. Indem wir (H-17) in (H-14) einsetzen, erhalten wir

$$S_\beta(x_0,\vec{x}) = \int_\beta d^n p\, e^{-ip\cdot x}\,\frac{i}{(2\pi)^n}\,\frac{\not{p}-m}{p^2-m^2+i\varepsilon}\ , \qquad \text{(H-18)}$$

wobei wir die folgende Definition berücksichtigt haben

$$\int_\beta d^n p\, f(p_0,\vec{p}) = \frac{2\pi i}{\beta}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\int d^{n-1}\vec{p}\; f\left(i(2\nu+1)\frac{\pi}{\beta},\vec{p}\right). \qquad \text{(H-19)}$$

Diese Vorschrift hat den Nachteil, daß der Grenzübergang $\beta\to\infty$, d.h. $T\to 0$, nicht auf einfache Weise durchgeführt werden kann. Der null-Temperatur-Beitrag ist daher nicht leicht zu identifizieren. Wir benutzen deshalb die Poisson-Identität (H-16), um (H-19) umzuschreiben:

$$\int_\beta d^n p\, f(p_0,\vec{p}) = \frac{2\pi i}{\beta}\int d\tilde{p}_0\, d^{n-1}\vec{p}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\tilde{p}_0-(2\nu+1)\tfrac{\pi}{\beta}\right) f(i\tilde{p}_0,\vec{p}) =$$

$$= i\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\int d\tilde{p}_0\, d^{n-1}\vec{p}\, e^{i\nu(\beta\tilde{p}_0-\pi)}\, f(i\tilde{p}_0,\vec{p}). \qquad \text{(H-20)}$$

Hier ist $\beta \to \infty$ ein harmloser Prozeß: Offenbar bleibt gerade der Summand mit $\nu = 0$ übrig, wonach eine Wick-Rotation das übliche Integral liefert. Also:

$$\int_\beta d^n p\, f(p_0, \vec{p})\Big|_{\beta\to\infty} = \int d^n p\, f(p_0, \vec{p}). \qquad \text{(H-21)}$$

Um (H-21) auf ζ_β sinnvoll anwenden zu können, haben wir in (H-18) im Nenner das übliche "$i\varepsilon$" dazugeschrieben.

Wir haben also Feynman-Diagramme bei endlicher Temperatur auszuwerten, indem wir die null-Temperatur-Feynman-Regeln verwenden und Integrale über innere Fermion-Impulse gemäß (H-20) ausrechnen. Eine analoge Regel für innere Boson-Impulse gibt es im Gross-Neveu-Modell nicht, weil die σ-Teilchen eine unendliche Masse haben.

Enthielte die Theorie Bosonen endlicher Masse, so hätte man für Integrale über innere Boson-Impulse die zu (H-20) entsprechende Vorschrift

$$\int_\beta d^n k\, g(k^0, \vec{k}) = i \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int d\tilde{k}_0 d^{n-1}\vec{k}\, e^{i\nu\beta\tilde{k}_0}\, g(i\tilde{k}_0, \vec{k}). \qquad \text{(H-22)}$$

Recht eingehende Diskussionen der Feynman-Regeln bei endlicher Temperatur finden sich z.B. bei Bernard [134] sowie bei Dolan und Jackiw [28]. Dort sind auch Alternativen zu den Regeln (H-20,22) aufgeführt.

Anhang I. Schritte zwischen (3c-78) und (3c-79)

Zur Auswertung des Integrals in (3c-78) integrieren wir zunächst den Raumanteil. Nach Integration des Winkelanteils haben wir $(Q = |\vec{p}|)$:

$$\int d\tilde{p}^{\,u-1}\, \ln\left(1+\frac{m_0^2 w^2}{\tilde{p}_0^{\,2}+\tilde{p}^{\,2}}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}^{\,u-1}}{\Gamma\left(\frac{u-1}{2}\right)} \int_0^\infty Q^{u-2} dQ \ln\left(1+\frac{m_0^2 w^2}{\tilde{p}_0^{\,2}+Q^2}\right) = \mathcal{I} \quad ,$$

was nach einer partiellen Integration in

$$\mathcal{I} = \frac{2\sqrt{\pi}^{\,u-1}}{\Gamma\left(\frac{u-1}{2}\right)} \frac{2}{u-1} m_0^2 w^2 \int_0^\infty \frac{Q^u dQ}{(\tilde{p}_0^{\,2}+Q^2)(\tilde{p}_0^{\,2}+m_0^2 w^2+Q^2)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}^{\,u-1}}{\Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right)} m_0^2 w^2 \int_0^1 d\alpha \int_0^\infty \frac{Q^u dQ}{\left[\tilde{p}_0^{\,2}+\alpha m_0^2 w^2+Q^2\right]^2} = \mathcal{I}$$

übergeht; im letzten Schritt haben wir den Feynmanschen Trick (3a-29) angewandt. Das Integral über Q ist vom Typ (3a-32) und kann daher ausgewertet werden. Somit

$$\mathcal{I} = \sqrt{\pi}^{\,u-1}\, \Gamma\left(\frac{3-u}{2}\right) m_0^2 w^2 \int_0^1 d\alpha \left[\tilde{p}_0^{\,2}+\alpha m_0^2 w^2\right]^{\frac{u-3}{2}} . \qquad \text{(I-1)}$$

Das setzen wir in (3c-78) ein und führen mittels [136]

$$\int_0^\infty \cos(xy)\,(x^2+a^2)^{-\gamma-\frac{1}{2}} = \left(\frac{y}{2a}\right)^{\gamma} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})} K_\gamma(ay) \qquad \text{(I-2)}$$

$(\mathrm{Re}\, a>0,\ \mathrm{Re}\,\gamma > -\frac{1}{2})$ das Integral über $\tilde{p}_0$ aus. Das ergibt

$$V_1^{\beta}(w) = \frac{N}{4\pi} m_0^2 w^2 (\ln w^2 - 1) +$$

$$+ \frac{2N}{(2\pi)^{u/2}} m_0^2 w^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \int_0^1 d\alpha \left(\frac{\nu\beta}{2\sqrt{\alpha}\, m_0 |w|}\right)^{1-u/2} K_{1-u/2}\left(\sqrt{\alpha}\,\nu\beta m_0 |w|\right)\Big|_{u\to 2} \qquad \text{(I-3)}$$

Jetzt führt die Substitution $z = \sqrt{\alpha}\,\nu\beta m_0 |w|$ auf

$$V_1^{\beta}(w) = \frac{N}{4\pi} m_0^2 w^2 (\ln w^2 - 1) +$$

$$+ \frac{2N}{\pi^{u/2}} \beta^{-u} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \nu^{-u} \int_0^{\nu\beta m_0 |w|} z^{u/2} K_{1-u/2}(z)\, dz \Big|_{u\to 2} . \qquad \text{(I-4)}$$

Das verbliebene Integral ist vom Typ [137]

$$\int_0^z t^\gamma K_{\gamma-1}(t)\,dt = \int_0^z t^\gamma K_{1-\gamma}(t)\,dt = -z^\gamma K_\gamma(z) + 2^{\gamma-1}\Gamma(\gamma) \qquad \text{(I-5)}$$

$(\mathrm{Re}\,\gamma > 0)$ und kann daher leicht integriert werden. Folglich:

$$V_1^\beta(w) = \frac{N}{4\pi} m_0^2 w^2 (\ln w^2 - 1) -$$

$$-2\frac{N}{\pi^{n/2}}\beta^{-n}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\left(\frac{\beta m_0|w|}{\nu}\right)^{n/2} K_{n/2}(\nu\beta m_0|w|)\Big|_{n\to 2} + \qquad \text{(I-6)}$$

$$+ 2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\frac{N}{\pi^{n/2}}\beta^{-n}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\nu^{-n}\Big|_{n\to 2}$$

Mit der Definition

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\left(\frac{x}{\nu}\right)^\gamma K_\gamma(\nu x) \equiv \mathcal{K}_\gamma(x) \qquad \text{(I-7)}$$

und mit [137]

$$x^\gamma K_\gamma(x)\Big|_{x^0\to 0} = 2^{\gamma-1}\Gamma(\gamma) \qquad \text{(I-8)}$$

$(\mathrm{Re}\,\gamma > 0)$ ergibt sich demnach

$$V_1^\beta(w) = \frac{N}{4\pi} m_0^2 w^2(\ln w^2 - 1) - \frac{2N}{\pi^{n/2}}\beta^{-n}\left(\mathcal{K}_{n/2}(\beta m_0|w|) - \mathcal{K}_{\frac{n}{2}}(0)\right)\Big|_{n\to 2}. \qquad \text{(I-9)}$$

Anhang K. Zu den Funktionen $\mathcal{K}_\gamma(x)$.

Definitionsgemäß gilt

$$\mathcal{K}_\gamma(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\left(\frac{x}{\nu}\right)^\gamma K_\gamma(\nu x). \qquad \text{(K-1)}$$

Darin sind K_γ die modifizierten Besselfunktionen in der Notation von [137]. Da sie für große Argumente z wie

$$K_\gamma(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\,(1+\mathcal{O}(\tfrac{1}{z})) \tag{K-2}$$

abfallen und sich für kleine z wie $(\mathrm{Re}\,\gamma>0)$

$$K_\gamma(z) \approx \tfrac{1}{2}\Gamma(\gamma)(\tfrac{z}{2})^{-\gamma} \tag{K-3}$$

verhalten sowie die Relation

$$K_\gamma(z) = K_{-\gamma}(z) \tag{K-4}$$

erfüllen, folgt, daß die Summe in (K-1) für $\varkappa>0$ und beliebiges γ konvergent ist. Außerdem konvergiert sie noch für $\varkappa=0$ und $\mathrm{Re}\,\gamma>0$. Wegen (K-3) gilt insbesondere für $\mathrm{Re}\,\gamma>0$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\gamma(0) &= 2^{\gamma-1}\,\Gamma(\gamma)\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\,\nu^{-2\gamma} \\ &= (2^{\gamma-1}-2^{-\gamma})\,\Gamma(\gamma)\,\zeta(2\gamma), \end{aligned} \tag{K-5}$$

worin $\zeta(z)$ die Riemannsche Zetafunktion ist; speziell:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(0) &= \frac{\pi^2}{12}, \\ \mathcal{K}_2(0) &= \frac{7\pi^4}{360}. \end{aligned} \tag{K-6}$$

Da die Besselfunktionen der Rekursion

$$\frac{\gamma}{z}\,K_\gamma(z) + \frac{d}{dz}\,K_\gamma(z) = -\,K_{\gamma-1}(z) \tag{K-7}$$

genügen, ergibt sich für die $\mathcal{K}_\gamma$ die wichtige Formel

$$\frac{d}{dx}\,\mathcal{K}_\gamma(x) = -x\,\mathcal{K}_{\gamma-1}(x). \tag{K-8}$$

Sie besitzt die Umkehrung

$$\mathcal{K}_\gamma(x) = \mathcal{K}_\gamma(0) - \int_0^x y\,\mathcal{K}_{\gamma-1}(y)\,dy. \qquad \text{(K-9)}$$

Da wir $\mathcal{K}_0(x)$ in der Form

$$\mathcal{K}_0(x) = -\tfrac{1}{4}\ln\left(\tfrac{x}{\pi}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\gamma + \sum_{\ell=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\ell-1} - \frac{1}{\sqrt{\left(\tfrac{x}{\pi}\right)^2+(2\ell-1)^2}}\right] \qquad \text{(K-10)}$$

schreiben können (das ist ein Spezialfall von Formel 8.526.2 in [141]), erlauben uns die Rekursionen (K-8,9) $\mathcal{K}_\ell(x)$ für ganzzahlige ℓ in ähnlicher Weise anzugeben. Beispielsweise findet man

$$\mathcal{K}_1(x) = \frac{\pi^2}{12} + \frac{x^2}{8}\ln\left(\tfrac{x}{\pi}\right)^2 + \frac{x^2}{4}\left(\gamma-\tfrac{1}{2}\right) - \pi^2\sum_{\ell=1}^{\infty}\left[\sqrt{\left(\tfrac{x}{\pi}\right)^2+(2\ell-1)^2} - (2\ell-1) - \frac{(x/\pi)^2}{2(2\ell-1)}\right]. \qquad \text{(K-11)}$$

Die Summen in (K-10,11) sind für beliebiges x konvergent.

Mitunter sind noch andere Darstellungen für $\mathcal{K}_\gamma(x)$ nützlich. So erhält man aus der Identität [141]

$$K_\gamma(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^\gamma \int_0^\infty \frac{y^{\gamma-\frac{1}{2}}\exp(-x\sqrt{1+y})}{\sqrt{1+y}}\,dy \qquad \text{(K-12)}$$

$(\mathrm{Re}\,\gamma > -\frac{1}{2},\ \mathrm{Re}\,x > 0)$ die Form

$$\mathcal{K}_\gamma(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\left(\frac{x}{\nu}\right)^\gamma\left(\frac{\nu x}{2}\right)^\gamma \int_0^\infty \frac{y^{\gamma-\frac{1}{2}}\exp(-\nu x\sqrt{1+y})}{\sqrt{1+y}}\,dy,$$

was nach der Substitution $y = (\xi/x)^2$ in

$$\mathcal{K}_\gamma(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})}\,2^{-\gamma}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\int_0^\infty \frac{\xi^{2\gamma}}{\sqrt{\xi^2+x^2}}\exp\left(-\nu\sqrt{\xi^2+x^2}\right)d\xi$$

übergeht.

Jetzt ist die Summation über ν einfach eine geometrische Reihe, so daß sich

$$K_\gamma(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})}\, 2^{-\gamma} \int_0^\infty \frac{\xi^{2\gamma}}{\sqrt{\xi^2+x^2}}\, \frac{d\xi}{\exp\left(\sqrt{\xi^2+x^2}\right)+1} \qquad \text{(K-13)}$$

ergibt. Für $\gamma = 0$ findet sich die Form (K-13) z.B. bei Dolan und Jackiw [28]; siehe auch [142]. Natürlich spiegelt der zweite Faktor des Integranden die Fermi-Dirac-Statistik wieder; für Bosonen findet man entsprechend die Bose-Einstein-Statistik.

Ferner ist es möglich die Identität [141]

$$K_\gamma(\nu x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\nu}{x}\right)^\gamma \int_0^\infty s^{-\gamma-1}\, e^{-\frac{\nu^2}{s}-\frac{x^2}{4}s}\, ds \qquad \text{(K-14)}$$

$(\mathrm{Re}\,\nu > 0,\ \mathrm{Re}\,x > 0)$ zu benutzen, um die Darstellung

$$K_\gamma(x) = 2^{\gamma-1} \sum_{\nu=1}^\infty (-1)^{\nu+1} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\gamma+1}} \exp\left(-\frac{x^2}{4}s - \frac{\nu^2}{s}\right) \qquad \text{(K-15)}$$

abzuleiten. Damit läßt sich Gleichung (3c-81) in der Form

$$V_1^\beta(w) = \frac{N}{4\pi} m_0^2 w^2 \left(\ln w^2 - 1\right) - \frac{N}{2\pi} \sum_{\nu=1}^\infty (-1)^{\nu+1} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \exp\left(-m_0^2 w^2 s - \frac{\nu^2\beta^2}{4s}\right) + \frac{N\pi}{6\beta^2} \qquad \text{(K-16)}$$

schreiben, was offensichtlich die von Dittrich und Englert [107] gegebene Eigenzeitdarstellung ist.

Es ist bemerkenswert, daß man in der QED ähnlich Ausdrücke erhält. Beispielsweise wurde von Dittrich [23] gezeigt, daß für ein Teilchen der Masse m und elektrischen Ladung e, das sich in einem konstanten Magnetfeld H befindet, die Temperaturkorrektur zum effektiven Potential in ein-Loop-Näherung von der Form

$$\Delta V = -\frac{eH}{4\pi^2} \sum_{\nu=1}^\infty (-1)^{\nu+1} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \exp\left(-m^2 s - \frac{\nu^2\beta^2}{4s}\right) \coth(eHs) \qquad \text{(K-17)}$$

ist. Für große Temperaturen, d.h. für $\beta m \ll 1$, tragen vor allem

kleine S zu dem Integral in (K-17) bei, so daß wir die Näherung

$$\coth(eHs) \approx \frac{1}{eHs}$$

im Integranden machen können. Das Integral ist dann vom Typ (K-15), und es ergibt sich für $\beta m \ll 1$:

$$\Delta V \approx -\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{\beta^4}\mathcal{K}_2(\beta m).$$

Wenn wir uns an Gl. (3c-79) erinnern, sehen wir, daß wir für $n=4$ im Gross-Neveu-Modell

$$\Delta V = -\frac{2N}{\pi^2}\frac{1}{\beta^4}\mathcal{K}_2(\beta m_0 |w|)$$

erhielten. Somit liefert das Gross-Neveu-Modell durchaus typische Ergebnisse, wie man sie auch in realistischen Theorien erhält.

Anhang L. Berechnung von $\tilde{\Gamma}_\beta^{(2)}(k)$.

Mit (3c-76) wird aus (3c-99)

$$\tilde{\Gamma}_\beta^{(2)}(k) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{i}\lambda^2\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2}\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right) -$$

$$-i2^{n/2}\lambda^2\mu^{2-n}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}(-1)^\nu\int d\tilde{p}_0\, d\vec{p}\, e^{i\nu\beta\tilde{p}_0}\frac{-\tilde{p}_0^2-\vec{p}^2-ic\tilde{p}_0k_0+\vec{p}\cdot\vec{k}+m^2}{(-\tilde{p}_0^2-\vec{p}^2-m^2+i\varepsilon)(-\tilde{p}_0^2-\vec{p}^2-2ic\tilde{p}_0k_0+2\vec{p}\cdot\vec{k}+k^2-m^2+i\varepsilon)} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{n/2}}{i}\lambda^2\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2}\Gamma(1-n/2) +$$

$$+i2^{n/2}\lambda^2\mu^{2-n}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}(-1)^\nu\int_0^1 d\alpha\int d\tilde{p}_0\, d\vec{p}^{\,n-1}e^{i\nu\beta\tilde{p}_0}\frac{\vec{p}^2-\vec{p}\cdot\vec{k}+\tilde{p}_0^2+ic\tilde{p}_0k_0-m^2}{[(\vec{p}-\alpha\vec{k})^2+(\tilde{p}_0+i\alpha k_0)^2-\alpha(1-\alpha)k^2+m^2]^2},$$

wobei Feynmans Trick (3a-29) angewandt wurde. Nach der Verschiebung $\vec{p} \longrightarrow \vec{p}+\alpha\vec{k}$ kann das Integral über $d^{n-1}\vec{p}$ leicht ausgewertet werden, indem man die Regeln (3a-31,32) benutzt. Das ergibt

$$\tilde{\Pi}_\beta^{(2)}(k) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{i}\lambda^2\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2}\Gamma(1-\tfrac{n}{2}) +$$

$$+ i\,2^{n/2}\pi^{(n-1)/2}\lambda^2\mu^{2-n}\Gamma\left(\tfrac{3-n}{2}\right)\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}(-1)^\nu\int_0^1 d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}d\tilde{p}_0\, e^{i\nu\beta\tilde{p}_0}\Big\{\left[(\tilde{p}_0+i\alpha k_0)^2-\alpha(1-\alpha)k^2+m^2\right]^{\frac{n-3}{2}} -$$

$$-\frac{3-n}{2}\left[(\tilde{p}_0+i\alpha k_0)^2-\alpha(1-\alpha)k^2+m^2\right]^{\frac{n-5}{2}}\left[(2\alpha-1)ik_0(\tilde{p}_0+i\alpha k_0)-2\alpha(1-\alpha)k^2+2m^2\right]\Big\}.$$

Für $\nu=0$ kann das Integral durch die Substitution $\tilde{p}_0 \longrightarrow \tilde{p}_0 - i\alpha k_0$ weiterverarbeitet werden. Wegen des Exponentialterms verbietet sich diese Substitution für $\nu\neq 0$. Doch können wir für $\nu\neq 0$ den Grenzübergang $n\to 2$ leicht durchführen, weil die Integrale endlich sind. Unter Berücksichtigung der Symmetrie des Integranden erhalten wir dann

$$\tilde{\Pi}_\beta^{(2)}(k) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{i}\lambda^2\,\Gamma(1-\tfrac{n}{2})\Big\{\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2} - (n-1)\int_0^1\frac{d\alpha}{\left[\frac{m^2}{\mu^2}-\alpha(1-\alpha)\frac{k^2}{\mu^2}\right]^{1-n/2}}\Big\}\Big|_{n\to 2} +$$

$$+ i\,(2\pi)\lambda^2\,4\,\mathrm{Re}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\int_0^1 d\alpha\int_0^\infty d\tilde{p}_0\cos(\nu\beta\tilde{p}_0)\,f(\alpha,\tilde{p}_0,k), \qquad \text{(L-1)}$$

worin

$$f(\alpha,\tilde{p}_0,k) = -\left[(\tilde{p}_0+i\alpha k_0)^2+m^2-\alpha(1-\alpha)k^2\right]^{-1/2} +$$

$$+\tfrac{1}{2}\left[(\tilde{p}_0+i\alpha k_0)^2+m^2-\alpha(1-\alpha)k^2\right]^{-3/2}\left[(2\alpha-1)ik^0(\tilde{p}_0+i\alpha k_0)+2m^2-2\alpha(1-\alpha)k^2\right]$$

$$= \left[(\tilde{p}_0+i\alpha k_0)^2+m^2-\alpha(1-\alpha)k^2\right]^{-3/2}\left[-(\tilde{p}_0+i\alpha k_0)(\tilde{p}_0+\tfrac{i}{2}k_0)\right]. \qquad \text{(L-2)}$$

In (L-1) kann der Limes $n\to 2$ mit den Methoden des Anhangs D vollzogen werden, wodurch sich

$$\tilde{\Gamma}_\beta^{(2)}(k) = \frac{2\pi}{i}\lambda^2\left[\ln\left(\frac{m^2}{m_0^2}\right) + B\left(-\frac{m^2}{k^2}\right)\right] -$$

$$- \frac{2\pi}{i}\lambda^2\, 4\,\mathrm{Re}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\int_0^1 d\alpha \int_0^\infty d\tilde{p}_0 \cos(\nu\beta\tilde{p}_0)\, f(\alpha, \tilde{p}_0, k) \qquad \text{(L-3)}$$

ergibt. Für $k_0 = 0$ läßt sich dieser Ausdruck noch weiter verarbeiten, da das Integral über $\tilde{p}_0$ wie folgt ausgeführt werden kann:

$$\int_0^\infty d\tilde{p}_0 \cos(\nu\beta\tilde{p}_0)\, f(\alpha, \tilde{p}_0, k)\Big|_{k_0=0} =$$

$$= \int_0^\infty d\tilde{p}_0 \cos(\nu\beta\tilde{p}_0)\, \frac{-\tilde{p}_0^2}{\left[\tilde{p}_0^2 + m^2 + \alpha(1-\alpha)\vec{k}^2\right]^{3/2}} = \qquad \text{(L-4)}$$

$$= \nu\beta\sqrt{m^2+\alpha(1-\alpha)\vec{k}^2}\; K_1\left(\nu\beta\sqrt{m^2+\alpha(1-\alpha)\vec{k}^2}\right) - K_0\left(\nu\beta\sqrt{m^2+\alpha(1-\alpha)\vec{k}^2}\right).$$

Dabei wurde (I-2) benutzt. Einsetzen von (L-4) in (L-3) führt auf

$$\tilde{\Gamma}_\beta^{(2)}(k)\Big|_{k_0=0} = \frac{2\pi}{i}\lambda^2\left\{\ln\left(\frac{m^2}{m_0^2}\right) + B\left(\frac{m^2}{\vec{k}^2}\right) + \int_0^1 d\alpha \frac{d}{dz}\left(4z K_0(z)\right)\Big|_{z=\sqrt{(\beta m)^2+\alpha(1-\alpha)(\beta|\vec{k}|)^2}}\right\}, \qquad \text{(L-5)}$$

wobei (K-1) und (K-8) berücksichtigt wurden.
Wegen (F-1) können wir (L-5) auch folgendermaßen schreiben:

$$\tilde{\Gamma}_\beta^{(2)}(k)\Big|_{k_0=0} = \frac{2\pi}{i}\lambda^2\left\{\int_0^1 d\alpha\, g\left(\sqrt{(\beta m)^2+\alpha(1-\alpha)(\beta|\vec{k}|)^2}\right) - \ln(\beta m_0)^2\right\} \qquad \text{(L-6)}$$

mit

$$g(z) = \frac{d}{dz}\left(z\left(4K_0(z) + \ln z^2\right)\right). \qquad \text{(L-7)}$$

Wenn wir hier $\mathcal{K}_0(z)$ in der Form (K-10) einsetzen, so finden wir

$$g(z) = \ln\pi^2 - 2\gamma + 4\sum_{\ell=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\ell-1} - \frac{(2\ell-1)^2}{\sqrt{(z/\pi)^2+(2\ell-1)^2}^3}\right].$$

Damit

$$\int_0^1 d\alpha\, g\left(\sqrt{(\beta m)^2+\alpha(1-\alpha)(\beta\vec{k})^2}\right) =$$

$$= \ln\pi^2 - 2\gamma + 4\sum_{\ell=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\ell-1} - (2\ell-1)^2\int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{(\frac{\beta m}{\pi})^2+(2\ell-1)^2+\alpha(1-\alpha)\left(\frac{\beta\vec{k}}{\pi}\right)^2}^3}\right] = \mathcal{K},$$

was vermöge

$$\int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha(1-\alpha)y^2}^3} = \frac{1}{x\left(x^2+\frac{1}{4}y^2\right)}, \quad (x>0)$$

zu

$$\mathcal{K} = \ln\pi^2 - 2\gamma + 4\sum_{\ell=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\ell-1} - \frac{1}{\sqrt{(\frac{\beta m}{\pi})^2+(2\ell-1)^2}}\right] +$$

$$+ 4\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(\frac{\beta m}{\pi})^2+(2\ell-1)^2}}\,\frac{(\frac{\beta m}{\pi})^2+(\frac{\beta\vec{k}}{2\pi})^2}{(\frac{\beta m}{\pi})^2+(\frac{\beta\vec{k}}{2\pi})^2+(2\ell-1)^2} \qquad \text{(L-8)}$$

$$= 4\mathcal{K}_0(\beta m) + \ln(\beta m)^2 + 4\mathcal{F}\left((\tfrac{\beta m}{\pi})^2, (\tfrac{\beta m}{\pi})^2+(\tfrac{\beta\vec{k}}{2\pi})^2\right)$$

integriert werden kann, wobei $\mathcal{F}(\xi,\eta)$ durch

$$\mathcal{F}(\xi,\eta) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\xi+(2\ell-1)^2}}\,\frac{\eta}{\eta+(2\ell-1)^2} \qquad \text{(L-9)}$$

definiert ist. Einsetzen von (L-8) in (L-6) hat daher

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}_{\beta}(k)\Big|_{k_0=0} = \frac{2\pi}{i}\lambda^2\left\{4\mathcal{K}_0(\beta m) + \ln\left(\frac{m}{m_0}\right)^2 + 4\mathcal{F}\left((\tfrac{\beta m}{\pi})^2, (\tfrac{\beta m}{\pi})^2+(\tfrac{\beta\vec{k}}{2\pi})^2\right)\right. \qquad \text{(L-10)}$$

zur Folge. Nun folgt aus (3c-95), was für $\beta>\beta_c$ gilt, sowie aus (3c-88) und (3c-89), daß

$$4\mathcal{K}_0(\beta m) + \ln\left(\frac{m}{m_0}\right)^2 = \begin{cases} 0 & \text{für } \beta>\beta_c \\ \ln(\beta_c/\beta) & \text{für } \beta\le\beta_c \end{cases} \qquad \text{(L-11)}$$

gilt. Deshalb ergibt sich schließlich

$$\left.\tilde{\Pi}_\beta^{(2)}(k)\right|_{k_0=0} = \frac{2\pi}{i}\lambda^2 \begin{cases} 4\mathcal{F}\left(\left(\frac{\beta m}{\pi}\right)^2, \left(\frac{\beta m}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{\beta k^*}{2\pi}\right)^2\right) & \text{für } \beta > \beta_c \\ \ln\left(k/\beta\right) + 4\mathcal{F}\left(0, \left(\frac{\beta k^*}{2\pi}\right)^2\right) & \text{für } \beta \le \beta_c \end{cases} . \qquad \text{(L-12)}$$

Anhang M. Im Abschnitt 3d benötigte Integrale.

Zur Auswertung der im Abschnitt 3d benötigten Integrale benützen wir die Vorschrift (3c-76) und die Formeln (3a-31,32), ohne daß wir jedesmal darauf hinweisen. Eine Integrationsvariable α ist stets eine Feynmansche Variable im Sinne von (3a-29) oder gegebenenfalls von

$$\frac{1}{a^2 b} = -\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{ab} = 2\int_0^1 \frac{(1-\alpha)\,d\alpha}{[(1-\alpha)a + \alpha b]^3} . \qquad \text{(M-1)}$$

Ferner machen wie häufigen Gebrauch von der Tatsache, daß auch bei endlicher Temperatur das Impulsraum-Integral über eine ungerade Funktion verschwindet:

$$\int_\beta d^4p\, f(p) = 0 \quad , \quad \text{falls } f(p) = -f(-p) . \qquad \text{(M-2)}$$

Das folgt unmittelbar aus der Regel (3c-76).

Außerdem ist es nützlich, die folgende Definition einzuführen:

$$A_\gamma(x) \equiv \Gamma(\gamma) - 2^{2-\gamma} x^{2\gamma} \mathcal{K}_{-\gamma}(x) . \qquad \text{(M-3)}$$

Die Definition der $\mathcal{K}_\gamma(x)$ impliziert

$$A_\gamma(x) = 2 \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (-1)^\nu \left(\frac{|\nu| x}{2}\right)^\gamma K_\gamma(|\nu| x), \qquad \text{(M-4)}$$

was ein häufig auftretender Ausdruck ist.

Damit kommen wir zu den einzelnen Integralen.

$$\text{(1)} \quad I_1 = \int_\beta d^n p \, \frac{\not p - m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = m i \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int d\tilde p_0 \, d^{n-1}\vec p \, \frac{e^{i\nu(\beta \tilde p_0 - \pi)}}{\tilde p_0^2 + \vec p^{\,2} + m^2}.$$

Dieses Integral kennen wir aus (3c-90) bis (3c-93). Von dort:

$$I_1 = i \pi^{n/2} m^{n-1} A_{1-n/2}(\beta m). \qquad \text{(M-5)}$$

$$\begin{aligned}
\text{(2)} \quad I_2 &= \int_\beta d^n p \left[\frac{\not p - m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\right]^2 = -\frac{1}{m} I_1 + 2m^2 \int_\beta d^n p \, \frac{1}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)^2} = \\
&= -\frac{1}{m} I_1 + 2 i m^2 \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (-1)^\nu \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde p_0 \cos(\nu\beta\tilde p_0) \int d^{n-1}\vec p \, \frac{1}{(\tilde p_0^2 + \vec p^{\,2} + m^2)^2} = \\
&= -\frac{1}{m} I_1 + 4 i m^2 \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\tfrac{5-n}{2}\right) \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (-1)^\nu \int_0^\infty d\tilde p_0 \, \frac{\cos(\nu\beta\tilde p_0)}{(\tilde p_0 + m^2)^{(5-n)/2}} = \\
&= -\frac{1}{m} I_1 + 4 i \pi^{n/2} m^2 \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (-1)^\nu \left(\frac{|\nu|\beta}{2m}\right)^{2-n/2} K_{2-n/2}(|\nu|\beta m) = \\
&= i \pi^{n/2} m^{n-2} \left[2 A_{2-n/2}(\beta m) - A_{1-n/2}(\beta m)\right].
\end{aligned} \qquad \text{(M-6)}$$

(3) $$I_3 = \int_\beta d^n p \left[\frac{\not p - m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\right]^2 \not p = I_1 - m I_2 =$$

$$= 2i\pi^{n/2} m^{n-2} \left[A_{1-n/2}(\beta m) - A_{2-n/2}(\beta m)\right]. \qquad \text{(M-7)}$$

(4) $$I_4 = \int d^n p \, \frac{\not p - u_0}{p^2 - u_0^2 + i\varepsilon} \, \frac{\not p - \not k - u_0}{(p-k)^2 - u_0^2 + i\varepsilon} =$$

$$= \int_0^1 d\alpha \int d^n p \, \frac{p^2 - (2u_0 + k)\not p + u_0(u_0 + k)}{[p^2 - 2\alpha p\cdot k + \alpha k^2 - u_0^2 + i\varepsilon]^2} \, .$$

Die Substitution $p \to p + \alpha k$ macht den Nenner symmetrisch in p und symmetrisch bzgl. $\alpha \to (1-\alpha)$. Unsymmetrische Teile können dann im Zähler weggelassen werden. Somit

$$I_4 = \int_0^1 d\alpha \int d^n p \, \frac{p^2 - \alpha(1-\alpha)k^2 + u_0^2}{[p^2 + \alpha(1-\alpha)k^2 - u_0^2 + i\varepsilon]^2} = 2^{-n/2} \operatorname{Tr} I_4 \, .$$

$\operatorname{Tr} I_4$ haben wir schon im Anhang E berechnet; folglich:

$$I_4 = i\pi^{n/2} (1-n) \Gamma(1 - \tfrac{n}{2}) \int_0^1 \frac{d\alpha}{[u_0^2 - \alpha(1-\alpha)k^2]^{1-n/2}} \, . \qquad \text{(M-8)}$$

(5) $$I_5 = \int d^n p \, \frac{\not p - \not k - u_0}{(p-k)^2 - u_0^2 + i\varepsilon} \, \frac{\not p - u_0}{p^2 - u_0^2 + i\varepsilon} \, .$$

Wenn man gemäß $p \to p + k$ substituiert, sieht man, daß

$$I_5 = I_4 \Big|_{k \to -k}$$

gilt. Da I_4 nur von k^2 abhängt, folgt daraus

$$I_5 = I_4 \, . \qquad \text{(M-9)}$$

(6) $$I_6 = \int d^n p \; \frac{\not p - m_0}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \; \frac{\not p - \not k - m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \; \frac{\not p - m_0}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} =$$

$$= 2 \int_0^1 d\alpha \, (1-\alpha) \int d^n p \; \frac{(\not p - m_0)(\not p - \not k - m_0)(\not p - m_0)}{[p^2 - 2\alpha p\cdot k + \alpha k^2 - m_0^2 + i\varepsilon]^3} =$$

$$= \int_0^1 d\alpha \int d^n p \; \frac{1}{[p^2 + \alpha(1-\alpha) k^2 - m_0^2 + i\varepsilon]^3} \Big\{ m_0 \left[-3p^2 + \alpha(1-\alpha) k^2 - m_0^2 \right] +$$

$$+ \not k \left[\left(2\left(1 + \tfrac{2}{n}\right) \alpha(1-\alpha) - \tfrac{1}{n} \right) p^2 - 2(\alpha(1-\alpha))^2 k^2 + (6\alpha(1-\alpha) - 1) m_0^2 \right] \Big\}.$$

Hier haben wir schon bzgl. p und α symmetrisiert. Im Anhang N wird nur $Tr(I_6 \tilde{I}_1)$ benötigt, wobei $\tilde{I}_1$ keine Dirac-Matrizen enthält. Es genügt daher, $Tr I_6$ zu berechnen. Wir finden

$$Tr\, I_6 = 2^{n/2} m_0 \int_0^1 d\alpha \int d^n p \; \frac{-3p^2 + \alpha(1-\alpha)k^2 - m_0^2}{[p^2 + \alpha(1-\alpha)k^2 - m_0^2 + i\varepsilon]^3} =$$

$$= i\,(2\pi)^{n/2} (1-n)\, \Gamma(2 - n/2)\; m_0 \int_0^1 \frac{d\alpha}{[m_0^2 - \alpha(1-\alpha)k^2]^{2-n/2}} . \qquad \text{(M-10)}$$

(7) $$I_7 = \int d^n p \; \frac{\not p - m_0}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \; \frac{\not p + \not k - m_0}{(p+k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \; \frac{\not p - m_0}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} = I_6 \Big|_{k \to -k}$$

Auch hier benötigen wir nur $Tr(I_7 \tilde{I}_1) = \tilde{I}_1 \, Tr\, I_7$. Wegen der Symmetrie von (M-10) gilt daher

$$Tr\, I_7 = Tr\, I_6 . \qquad \text{(M-11)}$$

(8) $$I_8 = \int d^n p \, \frac{\not p - m_0}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \, \frac{\not p - \not k - m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \, \frac{\not p - m_0}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \, \not p \, .$$

Wieder brauchen wir nur $\mathrm{Tr}\, I_8$. Das ergibt sich zu

$$\mathrm{Tr}\, I_8 = 2^{n/2} \int_0^1 d\alpha \int d^n p \, \frac{(p^2)^2 + 3 m_0^2 p^2 + \alpha(1-\alpha) k^2 [m_0^2 - \alpha(1-\alpha) k^2]}{[p^2 - m_0^2 + \alpha(1-\alpha) k^2 + i\varepsilon]^3} \, ,$$

wobei die Symmetrisierung schon durchgeführt ist. Integration über p impliziert

$$\mathrm{Tr}\, I_8 = i (2\pi)^{n/2} \Gamma(1 - \tfrac{n}{2}) (\tfrac{1-n}{2}) \int_0^1 d\alpha \, \frac{n m_0^2 - 2\alpha(1-\alpha) k^2}{[m_0^2 - \alpha(1-\alpha) k^2]^{2 - n/2}} =$$

$$= i (2\pi)^{n/2} \Gamma(1 - \tfrac{n}{2}) (1-n) \left\{ \int_0^1 \frac{d\alpha}{[m_0^2 - \alpha(1-\alpha) k^2]^{1 - n/2}} + (\tfrac{n}{2} - 1) m_0^2 \int_0^1 \frac{d\alpha}{[m_0^2 - \alpha(1-\alpha) k^2]^{2 - n/2}} \right\} \quad \text{(M-12)}$$

(9) $$I_9 = \int d^n p \, \frac{\not p - m_0}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \, \frac{\not p + \not k - m_0}{(p+k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \, \frac{\not p - m_0}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \, \not p = I_8 \Big|_{k \to -k}$$

Daher $\mathrm{Tr}\, I_9 = \mathrm{Tr}\, I_8$. (M-13)

Anhang N. Zur Berechnung von z_6 in zwei-Loop-Näherung.

Mit den Feynman-Regeln (3c-65) übersetzen wir Fig. 30a und erhalten nach offensichtlichen Vereinfachungen:

$$(-1) \lambda^2 \mu^{2-n} \, \mathrm{Tr} \int d^n p \, \frac{\not p - m_0}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \, \frac{\not p - \not k - m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} +$$

$$+ \frac{i}{(2\pi)^n} \frac{\lambda^4}{N} \mu^{4-2n} \, \mathrm{Tr} \int d^n p \, d^n q \, \frac{\not p - \not k - m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \, \frac{\not p - m_0}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \, \frac{\not q - m_0}{q^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \, \frac{\not q - \not k - m_0}{(q-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} +$$

$$+2z_\lambda(-1)\lambda^2\mu^{2-u}\,\mathrm{Tr}\int d^up\;\frac{\not p-m_0}{p^2-m_0^2+i\varepsilon}\;\frac{\not p-\not k-m_0}{(p-k)^2-m_0^2+i\varepsilon}+$$

$$+\frac{i}{(2\pi)^u}\frac{\lambda^4}{N}\mu^{4-2u}\,\mathrm{Tr}\int d^up\,d^uq\;\frac{\not p-m_0}{p^2-m_0^2+i\varepsilon}\;\frac{\not p-\not k-m_0}{(p-k)^2-m_0^2+i\varepsilon}\;\frac{\not p-m_0}{p^2-m_0^2+i\varepsilon}\;\frac{\not q-m_0}{q^2-m_0^2+i\varepsilon}+ \qquad (N-1)$$

$$+\lambda^2\mu^{2-u}\,\mathrm{Tr}\int d^up\;\frac{\not p-m_0}{p^2-m_0^2+i\varepsilon}\;\frac{\not p-\not k-m_0}{(p-k)^2-m_0^2+i\varepsilon}\;\frac{\not p-m_0}{p^2-m_0^2+i\varepsilon}\;(z_4\not p+z_\lambda m_0)+$$

$$+\frac{i}{(2\pi)^u}\frac{\lambda^4}{N}\mu^{4-2u}\,\mathrm{Tr}\int d^up\,d^uq\;\frac{\not p-m_0}{p^2-m_0^2+i\varepsilon}\;\frac{\not p+\not k-m_0}{(p+k)^2-m_0^2+i\varepsilon}\;\frac{\not p-m_0}{p^2-m_0^2+i\varepsilon}\;\frac{\not q-m_0}{q^2-m_0^2+i\varepsilon}+$$

$$+\lambda^2\mu^{2-u}\,\mathrm{Tr}\int d^up\;\frac{\not p-m_0}{p^2-m_0^2+i\varepsilon}\;\frac{\not p+\not k-m_0}{(p+k)^2-m_0^2+i\varepsilon}\;\frac{\not p-m_0}{p^2-m_0^2+i\varepsilon}\;(z_4\not p+z_\lambda m_0)+$$

$$+\frac{(2\pi)^u}{i}z_6=0\quad\text{für}\quad k^2=-\mu^2.$$

In der Notation von Anhang M lautet das folgendermaßen:

$$-\lambda^2\mu^{2-u}\,\mathrm{Tr}\,I_4+\frac{i}{(2\pi)^u}\frac{\lambda^4}{N}\mu^{4-2u}\,\mathrm{Tr}\,(I_5I_4+I_6\tilde I_1+I_7\tilde I_1)+$$

$$+z_\lambda\lambda^2\mu^{2-u}\,\mathrm{Tr}\,(-2I_4+m_0I_6+m_0I_7)+z_4\lambda^2\mu^{2-u}\,\mathrm{Tr}\,(I_8+I_9)+ \qquad (N-2)$$

$$+\frac{(2\pi)^u}{i}z_6=0\quad\text{für}\quad k^2=-\mu^2,$$

wobei $\tilde I_1$ durch $\tilde I_1=I_1|_{\beta=\infty,m=m_0}$ gegeben ist. Indem wir die Ergebnisse aus Anhang M verwenden, erhalten wir aus (N-2)

$$z_\sigma = \frac{\Gamma(1-\frac{n}{2})(n-1)}{(2\pi)^{n/2}} \lambda^2 \left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2} \Big\{ R_{1-n/2}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right) -$$

$$- \frac{\Gamma(1-\frac{n}{2})}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\lambda^2}{N} \left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)^{1-n/2} \left[(n-1) R_{1-n/2}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right) - (2-n) R_{2-n/2}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)\right] + \qquad \text{(N-3)}$$

$$+ 2(z_\lambda - z_4) \left[R_{1-n/2}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right) - (1-n/2) R_{2-n/2}\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right)\right] \Big\}.$$

Darin steht $R_\gamma(y)$ als Abkürzung für

$$R_\gamma(y) = \int_0^1 \frac{d\alpha}{[1+\alpha(1-\alpha)y]^\gamma} . \qquad \text{(N-4)}$$

5) Literaturverzeichnis

[1] R.N. Mohapatra, G. Senjanović, Phys.Rev. D20 (1979) 3390

[2] S.B. Treiman, F. Wilczek, Phy.Lett. 95B (1980) 222

[3] F. Wilczek, Scient.Am., Dec. 1980, p. 60

[4] J.N. Fry, K.A. Olive, M.S. Turner, Phys.Rev. D22 (1980) 2953; ibid. 2977

[5] A.P. Linde, Rept.Prog.Phys. 42 (1979) 389

[6] A.D. Dolgov, Ya.B. Zeldovich, Rev.Mod.Phys. 53 (1981) 1

[7] H. Fleming, J.L. de Lyra, C.P.C. Prado, V.L.R. Silveira, Lett.Nuovo Cim. 27 (1980) 261

[8] H. Fleming, V.L.R. de Silveira, Nuovo Cim. 58B (1980) 208

[9] D. Kazanas, Astrophys. J. [Lett.Ed.] 241 (1980) L 59

[10] A. Billoire, K. Tamvakis, The Coleman-Weinberg Mechanism in Early Cosmology, CERN preprint TH. 3019 (1981)

[11] Ein Review über den Bag ist: P. Hasenfratz, J. Kuti, Phys. Rept. C40 (1978) 75

[12] A. Chodos, R.L. Jaffee, K. Johnson, C.B. Thorn, V.F. Weisskopf, Phys.Rev. D9 (1974) 3471

[13] T. De Grand, R.L. Jaffee, K. Johnson, J. Kiskis, Phys.Rev. D12 (1975) 2060

[14] K. Johnson, C.B. Thorn, Phys.Rev. D13 (1976) 1934

[15] A. Jevicki, Phys.Rev. D21 (1980) 992

[16] S. Adler, Non-Abelian Statics and Euclidean Functional Analysis, Princeton preprint 1980

[17] S. Adler, Effective Action Approach to Mean Field Non-Abelian Statics and a Model for Bag-Formation, Princeton preprint 1981

[18] S.M. Moore, Lett. Nuovo Cim. 23 (1978) 195

[19] H.T. Yura, The Quantum Electrodynamics of a Medium, RAND report R-410-PR, 1963

[20] O.K. Kalashnikov, V.V. Klimov, Phys.Lett. 95B (1980) 423

[21] S. Hawking, Comm.Math.Phys. 43 (1975) 199

[22] B. Müller, W. Greiner, J. Rafelski, Phys.Lett. 63A (1977) 181

[23] W. Dittrich, Phys.Lett. 83B (1979) 67; Phys.Rev. D19 (1979) 2385

[24] W. Dittrich, V. Schanbacher, Phys.Lett. 100B (1981) 415

[25] V. Schanbacher, Dissertation, Tübingen 1981

[26] B. Müller, J. Rafelski, Phys.Lett. 101B (1981) 111

[27] M. Ninomiya, N. Sakai, Finite Temperature Behaviour of Color Ferromagnetic State in QCD, Rutherford and Appleton Lab. preprint RL-81-018, 1981

[28] L. Dolan, R. Jackiw, Phys.Rev. D9 (1974) 3320

[29] S. Weinberg, Phys.Rev. D9 (1974) 3357

[30] I. Affleck, Nucl.Phys. B162 (1980) 461

[31] J.I. Kapusta, Thermodynamics of Chromomagnetism, Los Alamos preprint LA-UR 80-2550, 1980

[32] L. Jacobs, Phys.Rev. D10 (1974) 3956

[33] B.J. Harrington, A. Yildiz, Phys.Rev. D11 (1975) 779

[34] D.J. Gross, R.D. Pisarski, L.G. Yaffe, Rev.Mod.Phys. 53 (1981)4

[35] R.J. Noble, Phys.Rev. D20 (1979) 3179

[36] N. Bilić, D.E. Miller, Phys.Rev. D22 (1980) 472

[37] N. Bilić, Phys.Lett. 97B (1980) 107

[38] F. Karsch, H. Satz, Phys.Rev. D22 (1980) 480

[39] S.T. Love, Phys.Rev. D23 (1981) 420

[40] P.C.W. Davis, J.Phys. A8 (1975) 609

[41] W.G. Unruh, Phys.Rev. D14 (1976) 870

[42] G.W. Gibbons, M.J. Perry, Proc.R.Soc. (London) A358 (1978) 467

[43] N. Sanchez, Phys.Lett. 87B (1979) 212

[44] W. Troost, H. Van Dam, Nucl.Phys. B152 (1979) 442

[45] M. Soffel, B. Müller, W. Greiner, Phys.Rev. D22 (1980) 1935

[46] L.F. Abbott, Gravitational Effects on the SU(5) Breaking Phase Transition for a Coleman-Weinberg Potential, CERN preprint TH. 3018, 1981

[47] W. Thirring, Ann.of Phys. 3 (1958) 91

[48] A.A. Ansel'm, Sov.Phys. JETP 9 (1959) 608

[49] D.J. Gross, A. Neveu, Phys.Rev. D10 (1974) 3235

[50] J.D. Bjorken, S.D. Drell, Relativistische Quantenmechanik, BI, Mannheim 1966

[51] H.J. Munczek, A.M. Nemirovsky, Phys.Rev. D22 (1980) 2001

[52] V.G. Vaks, A.I. Larkin, Sov.Phys. JETP 13 (1961) 979

[53] S. Coleman, 1/N, Lecture at Erice 1979, SLAC preprint 2484, 1980

[54] E.C. Zeeman, J.Math.Phys. 5 (1964) 490

[55] S. Coleman, Comm.Math.Phys. 31 (1973) 259
Prof. H. Kleinert hat mich auf folgende Vorgänger der Colemanschen Arbeit hingewiesen: N.D. Mermin, H. Wagner, Phys.Rev.Lett. 17 (1966) 1133; P.C. Hohenberg, Phys.Rev. 158 (1967) 383.

[56] A.Z. Capri, R. Ferrari, Lett.Nuovo Cim. 29 (1980) 423

[57] J. Schwinger, Phys.Rev. 128 (1962) 2425

[58] G. 't Hooft, Nucl.Phys. B75 (1974) 461

[59] K. Pohlmeyer, Comm.Math.Phys. 46 (1976) 207

[60] H. Eichenherr, Nucl.Phys. B146 (1978) 215

[61] V. Golo, A. Perelomov, Phys.Lett. 79B (1978) 112

[62] R.F. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu, Phys.Rev. D12 (1975)2443

[63] A.B. und A.B. Zamolodchikov, Phys.Lett. 72B (1978) 481

[64] M. Karowski, H.J. Thun, Complete S-Matrix of the O(2N) Gross-Neveu Model, DESY preprint 80/105, 1980

[65] E. Witten, Nucl.Phys. B160 (1979) 57

[66] S. Coleman, E. Weinberg, Phys.Rev. D7 (1973) 1888

[67] G. Duerksen, Manifest Chiral Symmetry Preservation in the 1/N-Expanded SU(N) Thirring Model, Chicago preprint EFI 80/50, 1980

[68] A. d'Adda, M. Lüscher, P. Di Vecchia, Nucl.Phys. B146 (1978) 63; ibid. B152 (1979) 125

[69] R.J. Cant, A.C. Davis, Zschr. Phys. C5 (1980) 299

[70] T. Kugo, P. Townsend, Phys.Lett. 101B (1981) 82

[71] A. Neveu, N. Papanicolaou, Comm.Math.Phys. 58 (1978) 31

[72] E. Witten, Nucl.Phys. B145 (1978) 110

[73] A.J. de Silva, M. Gomes, R. Köberle, Phys.Rev. D20 (1979) 895

[74] R. Köberle, V. Kurak, J.A. Swieca, Phys.Rev. D20 (1979) 897

[75] siehe [49] und: D.J. Gross, Strong Interaction Physics, Lectures at Princeton University 1978/79, unpublished

[76] G. 't Hooft, M. Veltman, Nucl.Phys. B44 (1972) 189

[77] C.G. Bollini, J.J. Giambiagi, Nuovo Cim. 12B (1972) 20

[78] G. Leibbrandt, Rev.Mod.Phys. 47 (1975) 849

[79] H. Fleming, K. Furuya, Nuovo Cim. 49A (1979) 101

[80] S.N.M. Ruijsenaars, Scattering Theory for the Federbush, Massless Thirring and Continuum Ising Models, Texas A and M preprint, 1981

[81] E. Witten, The 1/N-Expansion in Atomic and Particle Physics, Lecture at Cargèse, 1979; Quarks, Atoms and the 1/N-Expansion, Phys.Today, July 1980

[82] R.G. Roberts, What is α_{strong}? and what, if anything, is Λ_{QCD}?, CERN preprint 3024, 1981

[83] S. Coleman, Secret Symmetry, Lecture at Erice, 1973

[84] Y. Nambu, Phys.Lett. 26B (1968) 626

[85] M.M. Nieto, Am.J.Phys. 47 (1979) 1067

[86] L.D. Mlodinow, N. Papanicolaou, Ann.of Phys. 128 (1980) 314

[87] L.D. Mlodinow, N. Papanicolaou, Ann.of Phys. 131 (1981) 1

[88] R.J. Cant, Phys.Lett 95B (1980) 380

[89] A. Jevicki, B. Sakita, Nucl.Phys. B165 (1980) 511

[90] A. Jevicki, H. Levine, Phys.Rev.Lett. 44 (1980) 1443

[91] A. Jevicki, N. Papanicolaou, Nucl.Phys. B171 (1980) 362

[92] R. Jackiw. Recent Results in the $^{1}/_{N}$-Approximation, MIT preprint CTP # 888, 1980

[93] G. 't Hooft, Nucl.Phys. B72 (1974) 461

[94] I. Bars, F. Green, Phys.Rev. D20 (1979) 3311

[95] P. Mitra, R. Roy, Phys.Rev. D21 (1980) 511; ibid. 521

[96] D.J. Gross, E. Witten, Phys.Rev. D21 (1980) 446

[97] S. Coleman, E. Witten, Phys.Rev.Lett. 45 (1980) 100

[98] E. Brezin, D.J. Gross, Phys.Lett. 97B (1980) 120

[99] J. Ambjørn, Zschr.Phys. C5 (1980) 37

[100] J. Engels, I. Montay, Zschr.Phys. C5 (1980) 247

[101] A. Strominger, Phys.Lett. 99B (1981) 45

[102] A. Strominger, Phys.Lett. 101B (1981) 271

[103] L.M. Kraus, Loop Space and the Classical Correspondence in the Large N Limit: Two Dimensional QCD, MIT preprint CTP#913, 1980

[104] K. Bardacki, Classical Equations for Non-Abelian Gauge Theories in the Large N Limit, Princeton (Inst.)preprint, 1981

[105] F. Green, S. Samuel, The Large N Phase Transition in the U(N) Chiral Models, Princeton (Inst.) preprint, 1981

[106] S. Coleman, R. Jackiw, H.D. Politzer, Phys.Rev. D10 (1974) 2491

[107] N. Parga, D. Toussaint, J.R. Fulco, Phys.Rev. D20 (1979) 887

[108] R.J. Cant, R.J. Rivers, J.Phys. A13 (1980) 1623

[109] A. Jevicki, Phys.Rev. D20 (1979) 3331

[110] C. Lee, P.Y. Pac, Nucl.Phys. B177 (1981) 87

[111] M.B. Halpern, Nucl.Phys. B173 (1980) 504

[112] P. Rembiesa, J. Szmigielski, Phys.Rev. D21 (1980) 2833

[113] P. Rembiesa, Phys.Rev. D21 (1980) 2840

[114] S. Nussinov, Phys.Rev.Lett. 45 (1980) 1912

[115] J. Schwinger, Proc.Nat.Acad.of Sciences 37 (1951) 452; ibid. 455

[116] H.M. Fried. Functional Methods and Models in Quantum Field Theory, MIT Press, 1972

[117] B. Zumino, Effective Lagrangian and Broken Symmetry, lecture at Brandeis, 1970

[118] G. Jona-Lasinio, Nuovo Cim. 34 (1964) 1790

[119] K. Symanzik, Zschr. für Naturf. 9a (1954) 809

[120] K. Symanzik, Comm.Math.Phys. 16 (1970) 48

[121] J. Schwinger, Phys.Lett. 24B (1967) 473

[122] S. Weinberg, Phys.Rev. 166 (1968) 1568

[123] B. W. Lee, Chiral Dynamics, Gordon and Breach, 1972

[124] W. Dittrich, B.-G. Englert, Nucl.Phys. B179 (1981) 85

[125] H.D.I. Abarbanel, Nucl.Phys. B130 (1977) 29

[126] J.M. Jauch, F. Rohrlich, The Theory of Photons and Electrons, 2nd ed., Springer, 1976

[127] T. Muta, Phys.Rev. D18 (1978) 2196

[128] H. Fleming, K. Furuya, J.L. de Lyra, Nuovo Cim. 53A (1979) 405

[129] J. Iliopoulos, N. Papanicolaou, Nucl.Phys. B105 (1976) 77

[130] P.C. Martin, J. Schwinger, Phys.Rev. 115 (1959) 1342

[131] L.P. Kadanoff, G. Baym, Quantum Statistical Mechanics, Benjamin, 1962

[132] A.L. Fetter, J.D. Walecka, Quantum Theory of Many-Particle Systems, McGraw - Hill, 1971

[133] L.S. Brown, G.J. Maclay, Phys.Rev. 184 (1969) 1272

[134] C.W. Bernard, Phys.Rev. D9 (1974) 3312

[135] P.A. Goodinson, B.L. Luffman, Nuovo Cim. 60B (1980) 81

[136] Bateman Manuscript Project (A. Erdélyi,ed.), Tables of Integral Transforms I, McGraw-Hill, 1954

[137] Handbook of Mathematical Functions (M. Abramowitz, I. Stegun, eds.), 9th printing, Dover Publ. 1970

[138] R.F. Dashen, S.-K. Ma, R. Rajamaran,Phys.Rev. D11 (1975) 1499

[139] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, Phys.Rev. 122 (1961) 345; ibid. 124 (1961) 246

[140] D.A. Kirzhnits, A.D. Linde, Phys.Lett. 42B (1972) 471

[141] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Tables of Integrals, Series and Products, Acad. Press, 1965

[142] H.W. Braden, Expansions for Field Theories on $S' \times \Sigma$, Cambridge (GB) preprint DAMTP 81/5, 1981

[143] J.R. Primack, M.A. Sher, Nature 288 (1980) 680

6) Lebenslauf und Schriftenverzeichnis

Ich, Berthold-Georg Englert, wurde am 4. November 1953 als zweites von drei Kindern des Dr. med. Berthold Englert und seiner Frau Anneliese, geborene Biller, in Urach, Kreis Reutlingen geboren. Seit dem 26. Dezember 1976 bin ich mit Aleksandra Basta verheiratet, am 3. Februar 1980 kam unser Sohn Jan Alexander zur Welt.

In Urach besuchte ich ab 1960 Grundschule und Gymnasium und erwarb 1972 das Reifezeugnis. Nach dem Ableisten des Wehrdienstes begann ich im Wintersemester 1973/74 an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen das Studium der Physik. Das Vordiplom in Physik erhielt ich 1976, das Diplom im Jahre 1978. Nach dem Diplom verbrachte ich ein akademisches Jahr am Institut für Physik der Jagellonen-Universität Krakau, wo ich in der Arbeitsgruppe Feldtheorie bei Prof. Dr. Jerzy Rayski aktiv mitwirkte. Anschließend kehrte ich nach Tübingen zurück. Im Oktober 1979 begann ich am Institut für Theoretische Physik mit der Arbeit an der vorliegenden Dissertation "Thermische Effekte in Quantisierten Feldern am Beispiel des Gross-Neveu-Modells". Sie wurde unter der Leitung von Prof. Dr. Walter Dittrich angefertigt und im Juni 1981 fertiggestellt. Mein Studium nach dem Vordiplom, der Auslandsaufenthalt in Krakau und jetzt die Promotion wurden von der Studienstiftung des deutschen Volkes mit Stipendien gefördert.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten Becker, Dittrich, Gönnenwein, Großer, Hadeler, Krüger, Lenz, Lindner, Locher, Mack, Möllenstedt, Pfister, Sohr, Staudt, Stumpf, Wildermuth, Wittern sowie Rayski (Krakau).

Ich bin Autor bzw. Mitautor der folgenden Veröffentlichungen:

1) "Conditions on Classical Sources for a Quantum Scalar Field with Higher Order Derivatives", Physics Letters 83B (1979) 399-402; (zusammen mit J. Karkowski und J.M. Rayski, Jr.).
2) "Quantization of the Radiation-Damped Harmonic Oscillator", Annals of Physics 129 (1980) 1-21.

3) "One-Loop Thermal Corrections in the Gross-Neveu Model", Nuclear Physics B179 (1981) 85-105; (zusammen mit W. Dittrich).

Von ganzem Herzen danke ich meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Walter Dittrich, für die Wahl der interessanten Thematik und für die ausgezeichnete Betreuung, die diese Dissertation erst ermöglicht hat. Manche wertvolle Anregung verdanke ich Gesprächen mit Dr. W. Becker, Dr. D. Großer und V. Schanbacher. Die Reinschrift des Manuskripts wurde von Frl. C. Kienle erstellt, wofür ich mich aufrichtig bedanke.